512.83
516uf

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 78.

UEBER DIE

FUNCTIONALDETERMINANTEN

(De determinantibus functionalibus.)

Von

C. G. J. JACOBI.

(1841.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

A. W. Wilson
Haverford College, 1915

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, nicht zum kleinsten Maasse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) *M* —.80.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

UEBER DIE
FUNCTIONALDETERMINANTEN

(De determinantibus functionalibus).

Von

C. G. J. JACOBI.

(1841.)

Herausgegeben

von

P. Stäckel.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1896.

UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

512.83
J16 uf

Ueber die Functionaldeterminanten*)

von

C. G. J. Jacobi,

ord. Prof. d. Math. zu Königsberg.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 22. S. 319—352.

1.

In der vorhergehenden Abhandlung [1]) habe ich die vorzüglichsten Eigenschaften der Determinanten dargelegt, die zu einem beliebigen Systeme von Elementen gehören. In dieser Abhandlung werde ich voraussetzen, die Elemente der Determinante seien die partiellen Differentiale eines Systems von Functionen von eben so vielen Veränderlichen, nach diesen Veränderlichen genommen. Solche Determinanten spielen bekanntlich in der ganzen Analysis eine wichtige Rolle, ja sie treten bei verschiedenen Untersuchungen über Systeme von Functionen mehrerer Veränderlichen an die Stelle des Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen. Eine vortreffliche Erläuterung hierfür geben verschiedene Theoreme, die ich bei andern Gelegenheiten in Betreff dieser Determinanten aufgestellt habe [2]). Es dürfte daher vielleicht zweckmässig sein, solchen Determinanten eine besondere Benennung zu geben und sie als Functionaldeterminanten zu bezeichnen.

Eben so wie wir die Eigenschaften der Functionaldeterminanten aus den bekannten Eigenschaften der algebraischen

---

*) Was ich aus der Theorie der linearen Gleichungen und der algebraischen Determinanten als bekannt voraussetze, findet man in der vorhergehenden Abhandlung »Ueber die Determinanten« bewiesen; auf diese beziehen sich die Paragraphen, welche ich mit Sternchen bezeichnet habe.

Determinanten herleiten werden, eben so könnten umgekehrt die Eigenschaften der algebraischen Determinanten aus den Eigenschaften der Functionaldeterminanten erschlossen werden. Nimmt man nämlich an, dass

$$f, f_1, f_2, \cdots, f_n$$

lineare Functionen der Veränderlichen

$$x, x_1, x_2, \cdots, x_n$$

sind, also

$$f_k = a_k x + a'_k x_1 + a''_k x_2 + \cdots + a_k^{(n)} x_n ,$$

so wird

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a_k^{(i)} ,$$

und es lässt sich daher die Determinante, die zu einem beliebigen Systeme von Elementen $a_k^{(i)}$ gehört, ansehen als die Determinante, die zu einem Systeme partieller Differentiale

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

gehört oder als eine Functionaldeterminante.

[**320**] (**396**) Bevor ich jedoch zu dem eigentlichen Gegenstande komme, werde ich einige Bemerkungen über die Bezeichnung der partiellen Differentiale vorausschicken. Und da in dieser Abhandlung wiederholt von Functionen die Rede ist, die von einander abhängig oder nicht von einander abhängig sind, schien es angebracht, auch hierüber einige elementare Auseinandersetzungen hinzuzufügen.

2.

Um die partiellen Differentiale von den gewöhnlichen zu unterscheiden oder von denen, wo alle veränderlichen Grössen als Functionen einer einzigen Veränderlichen angesehen werden, pflegen *Euler* und andre die partiellen Differentiale in Klammern einzuschliessen. Da jedoch eine Anhäufung von Klammern für das Lesen und das Schreiben recht lästig ist, habe ich es vorgezogen, durch die Charakteristik

$$d$$

gewöhnliche Differentiale und durch die Charakteristik

∂

partielle Differentiale zu bezeichnen. Trifft man diese Uebereinkunft, so ist ein Irrthum ausgeschlossen. Ist also f eine Function von x und y, so werde ich schreiben

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \text{ [3]}.$$

Wenn eine Function nur eine Veränderliche enthält, so darf man in gleicher Weise die Charakteristik d oder ∂ benutzen.

Dieselbe Unterscheidung darf man auch bei der Bezeichnung von Integrationen benutzen, so dass die Ausdrücke

$$\int f(x, y)\, dx, \quad \int f(x, y)\, \partial x$$

verschiedene Bedeutung haben; in jenem wird nämlich y und daher auch $f(x, y)$ als Function von x angesehen, in diesem hat man die Integration allein nach x auszuführen und y während der Integration als Constante aufzufassen.

Lagrange hat andre Bezeichnungen vorgeschlagen, die man nicht selten mit Vortheil anwenden kann. Ist nämlich f eine Function mehrerer Veränderlichen x, y, z, so bezeichnet f' das totale Differential, das heisst den Ausdruck

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z';$$

hierin sind x', y', z' die Differentiale von x, y, z nach der Veränderlichen, die man als die unabhängige gewählt hat. Dagegen bezeichnet er partielle Differentiale, indem er hinter das Zeichen f' die Veränderliche schreibt, nach der die partielle Differentiation vorzunehmen ist, während die übrigen als Constanten gelten, so dass

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

[321] (397) Handelt es sich nur um Functionen von zwei Veränderlichen, so bezeichnet er durch kleine Striche über und unter der Zeile, wie oft die Function nach jeder von beiden Veränderlichen zu differentiiren ist, sodass zum Beispiel $f''_{,,,}$ dasselbe bedeutet wie

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}.$$

Die Bezeichnung von *Lagrange* versagt, wenn man bei einer Function von drei oder mehr Veränderlichen höhere als erste Differentiale darzustellen hat; freilich kommen solche Differentiale in der Théorie des fonctions nicht vor[4]).

Damit das partielle Differential einer Function, die von mehreren Veränderlichen abhängt, bestimmt ist, genügt nicht die Angabe der zu differentiirenden Function und der Veränderlichen, nach der zu differentiiren ist, man muss vielmehr ausserdem angeben, welches die Grössen sind, die während der Differentiation constant bleiben. Es sei nämlich f eine Function von $x, x_1, \ldots, x_n$. Man nehme n Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dieser Veränderlichen beliebig an und fasse f als Function der Veränderlichen $x, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ auf. Dann sind, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constant bleiben, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bei veränderlichem x keine Constanten mehr, und es sind auch nicht, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ constant bleiben, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ebenfalls constant. Der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x}$ wird nun ganz verschiedene Werthe anzeigen, je nachdem diese oder jene Grössen während der Differentiation constant sind.

Es werde zum Beispiel in einer Function f der beiden Veränderlichen x und y eine beliebige Function u von x und y an Stelle von y als zweite unabhängige Veränderliche eingeführt. Dann wird das Differential, das vorher

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

war, jetzt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

sein, sodass dasselbe Zeichen $\frac{\partial f}{\partial x}$ ganz verschiedene Werthe bezeichnet, je nach dem y oder u constant bleibt, während f nach x differentiirt wird.

Ich werde daher in dieser und in andern Abhandlungen, so oft partielle Differentiale gebraucht werden, durch die Aussage: f sei eine Function der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, nicht nur anzeigen, dass f von diesen Veränderlichen abhängt, dass es also constant bleibt, wenn diese constant bleiben, und sich ändert, wenn diese sich ändern — das würde in gleicher Weise gelten, wenn an Stelle von $x, x_1, \ldots, x_n$ irgend welche

andre Veränderliche $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$, Functionen davon, als unabhängige Veränderliche eingeführt würden, — wenn ich vielmehr sage, f sei eine Function der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, so will ich dadurch verstanden wissen: es soll, wenn diese Function partiell differentiirt wird, die Differentiation so angestellt werden, dass von diesen Veränderlichen immer nur eine sich ändert, während alle übrigen constant bleiben.

[322] Eben so muss, wenn die Formeln von jeder Zweideutigkeit frei sein sollen, bei der Bezeichnung nicht nur angezeigt werden, nach welcher Veränderlichen differentiirt wird, (398) sondern auch das ganze System der unabhängigen Veränderlichen, deren Function partiell differentiirt werden soll, damit man durch die Bezeichnung auch die Grössen erkennt, die während der Differentiation constant bleiben. Und das ist um so mehr nothwendig, als sich nicht vermeiden lässt, dass bei derselben Rechnung, ja sogar bei einer und derselben Formel, partielle Differentiale vorkommen, die sich auf verschiedene Systeme unabhängiger Veränderlichen beziehen, zum Beispiel in dem oben aufgestellten Ausdrucke

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

in dem f als Function von x und u, u dagegen als Function von x und y anzusehen ist; in diesen Ausdruck ging nämlich $\frac{\partial f}{\partial x}$ über, wenn u an Stelle von y als unabhängige Veränderliche eingeführt wird. Wenn man aber bei der abhängigen Veränderlichen die unabhängigen Veränderlichen hinzuschreibt, auf die sich die partiellen Differentiationen beziehen, so lässt sich jener Ausdruck durch folgende Formel darstellen, die von jeder Zweideutigkeit frei ist:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\ ^{5)}.$$

Freilich würde die Bezeichnung, die bei der vorhergehenden Gleichung angewandt wurde, und eben so alle andern, die man erdenken könnte, um partielle Differentiale durch die blosse Art der Bezeichnung vollständig zu bestimmen, bei allgemeineren Untersuchungen und bei verwickelteren Formeln sehr beschwerlich ausfallen, ja gar nicht durchzuführen sein, denn bei einer grösseren Anzahl der unabhängigen Veränderlichen

und bei mehreren Gliedern könnte es sich ereignen, dass eine Formel, die man durch eine einzige Zeile darstellen kann, eine ganze Seite in Anspruch nähme. Gewiss muss man den grössten Werth auf eine Bezeichnung legen, die alle Zweideutigkeit beseitigt und die Formeln ohne jede mündliche Erläuterung an und für sich deutlich und verständlich macht. Wo es jedoch ohne allzugrossen Nachtheil möglich war, glaubte ich mich in dem vorliegenden Falle wegen dieser ungeheuren und unvermeidlichen Weitschweifigkeit mit der Bezeichnung der Differentiale begnügen zu dürfen, die auf die Angabe der unabhängigen Veränderlichen verzichtet.

Es dürfte auch nicht vorkommen, dass ein verständiger Leser, der die Rechnungen aufmerksam verfolgt, darüber in Unsicherheit geräth, auf welches System unabhängiger Veränderlichen die einzelnen partiellen Differentiale bezogen werden. Indessen werde ich, wo es angebracht erscheint, damit man zwei Systeme partieller Differentiale, die verschiedenen Systemen von Veränderlichen entsprechen, leichter unterscheiden kann, das eine von beiden, wie *Euler* es zu thun pflegt, in Klammern einschliessen.

[323] 3.

Ist irgend eine Gleichung zwischen mehreren Grössen vorgelegt, so lässt sich eine jede dieser Grössen durch die übrigen bestimmen, es sei denn, dass die Gleichung identisch besteht. (**399**) Identisch nenne ich eine Gleichung, in der alle Glieder sich gegenseitig zerstören und die mithin zur Bestimmung einer Grösse untauglich ist. Entnimmt man aus der vorgelegten Gleichung den Werth einer Grösse und setzt diesen Werth in der vorgelegten Gleichung für die Grösse ein, so ergiebt sich eine identische Gleichung oder wir nennen vielmehr diesen Werth der Grösse einen der Gleichung entnommenen oder die Gleichung befriedigenden, wenn er, für die Grösse eingesetzt, die Gleichung zu einer identischen macht. Weil die Differentiation von Null wiederum Null und daher die Differentiation von sich gegenseitig zerstörenden Gliedern wiederum sich gegenseitig zerstörende Glieder ergiebt, so folgt, dass durch die Differentiation einer identischen Gleichung nach irgend einer Grösse wiederum eine identische Gleichung entsteht.

Ich nenne Gleichungen unabhängig von einander, wenn keine von selbst identisch besteht oder mit Hilfe der übrigen zu einer identischen gemacht werden kann.

Vorgelegt seien zwischen den Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ die Gleichungen

$$u = 0,\ u_1 = 0,\ \ldots,\ u_m = 0.$$

Aus der Gleichung $u = 0$ entnehme man den Werth einer gewissen Grösse x, die dann durch x_1, x_2 u. s. w. ausgedrückt ist, und setze ihn in die übrigen Gleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ u. s. w. ein. Darauf entnehme man aus der Gleichung $u_1 = 0$ den Werth einer zweiten Grösse x_1, die dann durch x_2, x_3 u. s. w. ausgedrückt ist, und setze ihn in den für x gefundenen Ausdruck und in die übrigen Gleichungen $u_2 = 0$ u. s. w. ein, u. s. w. u. s. w. Fährt man in dieser Weise fort, so werden durch die Gleichungen

$$(1) \qquad u = 0,\ u_1 = 0,\ \ldots,\ u_k = 0$$

die Werthe von $x, x_1, \ldots, x_k$ durch die Werthe der übrigen Grössen x_{k+1}, x_{k+2} u. s. w. ausgedrückt sein, und die übrigen Gleichungen

$$(2) \qquad u_{k+1} = 0,\ u_{k+2} = 0,\ \ldots,\ u_m = 0$$

werden allein x_{k+1}, x_{k+2} u. s. w. enthalten oder es werden die Grössen $x, x_1, \ldots, x_k$ aus ihnen eliminirt sein.

Wenn es für keinen Werth von k, der kleiner als m ist, eintritt, dass vermöge der Substitution der den Gleichungen (1) entnommenen Werthe von $x, x_1, \ldots, x_k$ eine der Gleichungen (2) identisch besteht, so können mittelst der vorstehenden Methode eben so viele Grössen, als Gleichungen vorgelegt sind, bestimmt oder durch die übrigen Grössen ausgedrückt werden.

Wenn es dagegen für einen gewissen Werth von k eintritt, dass vermöge der Substitution der den Gleichungen (1) entnommenen Werthe von $x, x_1, \ldots, x_k$ eine der übrigen Gleichungen $u_{k+1} = 0$, $u_{k+2} = 0$ u. s. w. identisch besteht, so kann diese identische Gleichung nicht zur Bestimmung einer Grösse durch die übrigen benutzt werden, [**324**] und es können mithin in diesem Falle nicht eben so viele Grössen, als Gleichungen vorgelegt sind, durch die übrigen ausgedrückt werden. Deshalb sind die vorgelegten Gleichungen unabhängig von einander oder sie sind es nicht, je nach dem mit ihrer Hülfe von den Grössen, zwischen denen sie bestehen, eben so viele oder nicht eben so viele durch die übrigen ausgedrückt werden (**400**) können.

Dagegen ist es ganz und gar unmöglich, mittelst der vorgelegten Gleichungen eine grössere Anzahl von Grössen zu bestimmen, als die Anzahl der Gleichungen beträgt. Mithin muss die Anzahl der Unbekannten, die von einander unabhängige Gleichungen enthalten, die Anzahl der Gleichungen entweder erreichen oder sie überschreiten und kann niemals geringer als diese sein.

Werden die Werthe von Grössen, die man aus eben so vielen Gleichungen ermittelt hat, wiederum in diese Gleichungen eingesetzt, so müssen identische Gleichungen herauskommen.

Sind von einander unabhängige Gleichungen vorgelegt, so darf man die Grössen, die mit Hülfe dieser Gleichungen durch die übrigen bestimmt werden sollen, nicht immer willkürlich auswählen. Kommen etwa zwei Grössen x und x_1 in allen vorgelegten Gleichungen nur additiv verbunden vor, so lässt sich nur $x + x_1$, aber nicht das einzelne x oder x_1 durch die übrigen Grössen ausdrücken.

Kann man durch die Gleichungen $u = 0$, $u_1 = 0$, ..., $u_m = 0$ die Grössen x, x_1, ..., x_m bestimmen oder durch die übrigen Grössen x_{m+1} u. s. w. ausdrücken, so lässt sich aus diesen Gleichungen keine Gleichung herleiten, die zwischen x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n allein besteht oder aus der gleichzeitig alle Grössen x, x_1, ..., x_m eliminirt sind. Man könnte nämlich vermöge einer solchen Gleichung eine der Grössen x_{m+1}, x_{m+2} u. s. w., etwa x_{m+1}, durch die übrigen x_{m+2} u. s. w. ausdrücken, und es würden daher mittelst $m + 1$ Gleichungen $m + 2$ Grössen x, x_1, ..., x_{m+1} durch die übrigen x_{m+2} u. s. w. bestimmt werden, was unmöglich ist.

Kann man dagegen aus den von einander unabhängigen Gleichungen

$$u = 0,\ u_1 = 0,\ \ldots,\ u_m = 0$$

nicht alle x, x_1, ..., x_m bestimmen, so lässt sich aus diesen Gleichungen immer eine andre herleiten, die zwischen x_{m+1}, x_{m+2} u. s. w. allein besteht oder aus der gleichzeitig alle x, x_1, ..., x_m eliminirt sind. Bestimmen wir nämlich für einen Werth von k, der kleiner als m ist, aus den Gleichungen

$$u = 0,\ u_1 = 0,\ \ldots,\ u_k = 0$$

die Grössen x, x_1, ..., x_k und setzen ihre Werthe in die Gleichungen

$$u_{k+1} = 0,\ u_{k+2} = 0,\ \ldots,\ u_m = 0$$

ein, so wird nur dann durch diese Gleichungen keine weitere der Grössen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m$ bestimmt, wenn diese Grössen vermöge der Substitution aus den Gleichungen $u_{k+1} = 0$ u. s. w. ganz und gar verschwinden oder wenn Gleichungen ausschliesslich zwischen den x_{m+1}, x_{m+2} u. s. w. hervorgehen.

[325] Wenn $m + 1$ unabhängige Gleichungen zwischen $n + 1$ Unbekannten vorgelegt sind, so kann, wie wir im Vorhergehenden sahen, nicht nur keine der vorgelegten Gleichungen mit Hülfe der übrigen zu einer identischen gemacht werden, sondern es können auch aus der Zahl der Unbekannten, und zwar im allgemeinen auf verschiedene Arten, $n - m$ Unbekannte ausgewählt werden, zwischen denen keine Gleichung besteht, die sich aus den vorgelegten Gleichungen ableiten liesse. Werden durch die Gleichungen $u = 0$, $u_1 = 0$, $\ldots$, $u_m = 0$ eben so viele Grössen $x, x_1, \ldots, x_m$, die sie enthalten, bestimmt, so sage ich, sie seien in Bezug auf diese Grössen unabhängig von einander.

(401) 4.

Ganz ähnliche Sätze gelten für Functionen, die unabhängig von einander sind. Functionen mehrerer Veränderlichen nenne ich unabhängig von einander, wenn keine von ihnen eine Constante ist oder durch die übrigen ausgedrückt werden kann oder, was dasselbe ist, wenn zwischen diesen Functionen allein keine von der Veränderlichen freie Gleichung besteht, die durch Substitution der Ausdrücke der Functionen zu einer identischen wird.

Wenn zwischen den vorgelegten Functionen eine oder mehrere Gleichungen dieser Art bestehen, so können eben so viele Functionen durch die übrigen bestimmt werden, und zwischen diesen besteht dann keine weitere Gleichung. Sind mithin vorgelegte Functionen nicht unabhängig von einander, so werden darunter gewisse Functionen unabhängig von einander sein und die übrigen werden sich durch diese ausdrücken lassen. Sind die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander, sind dagegen die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig von einander, so ist f eine Function von $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Wenn nämlich die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig von einander sind, so kann die Gleichung, die zwischen allen Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ besteht, nicht von der Function f frei sein, und daher wird f durch diese Gleichung als Function der übrigen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bestimmt.

Wenn Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ ausser diesen noch andere Grössen a, a_1, a_2 u. s. w. enthalten, so werde ich sagen: die Functionen seien in Bezug auf die Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ unabhängig von einander, wenn zwischen den Functionen allein und den Grössen a, a_1, a_2 u. s. w. keine Gleichung besteht.

Wenn man statt mehrerer Functionen nur eine Function einer Veränderlichen hat, so kommt der Fall, dass die Functionen nicht unabhängig von einander sind, auf den zurück, dass die Function eine Constante ist. Wenn nämlich nur eine Function vorgelegt ist, so wird sie vermöge der Gleichung, die zwischen den vorgelegten Functionen besteht, gleich einer Constanten.

Es seien f, f_1, f_2 u. s. w. von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, und es sei x eine der Veränderlichen, die in f enthalten ist. Dann kann man x durch f und die übrigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdrücken. Setzt man diesen Ausdruck von x in die Functionen f_1, f_2 u. s. w. ein, so wird f_1 ausser f noch gewisse von den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enthalten; sonst würde nämlich f_1 allein durch f ausgedrückt werden, [326] und das ist gegen unsere Voraussetzung, dass die Functionen f, f_1 u. s. w. unabhängig von einander sind. Es sei x_1 eine der Veränderlichen, die f_1 ausser f enthält. Dann kann man x_1 durch $f, f_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ ausdrücken. Setzt man diesen Ausdruck in die vorher gefundenen Ausdrücke von x, f_2, f_3 u. s. w. ein, so werden auch diese Grössen durch $f, f_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ausgedrückt. Jetzt wird f_2 wiederum gewisse von den Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ enthalten, denn nach der Voraussetzung lässt sich f_2 nicht durch f, f_1 allein ausdrücken. Mithin kann man wiederum eine der Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ durch die übrigen und durch f, f_1, f_2 ausdrücken.

Fahren wir in dieser Weise fort, so werden, wenn irgend welche von einander unabhängige Functionen gegeben sind, eben so viele von den Veränderlichen, die sie enthalten, durch die übrigen und [402] durch diese Functionen bestimmt. Dass nicht mehr von den Veränderlichen x u. s. w. durch die übrigen und durch die f u. s. w. ausgedrückt werden können, erhellt daraus, dass durch $m + 1$ Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, x_1, \ldots, x_n) = \omega \\ f_1(x, x_1, \ldots, x_n) = \omega_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x, x_1, \ldots, x_n) = \omega_m \end{cases}$$

nicht mehr als $m + 1$ Grössen bestimmt werden. Man könnte auch nicht, wenn ausser den von einander unabhängigen Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ andre f_{m+1} u. s. w. gegeben wären, die sich durch $f, f_1, \ldots, f_m$ allein ausdrücken lassen, mehr als $m + 1$ Veränderliche durch die übrigen $f, f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ u. s. w. ausdrücken, da nämlich f_{m+1} u. s. w. allein durch $f, f_1, \ldots, f_m$ ausgedrückt werden, so käme das auf dasselbe heraus, als ob man mehr als $m + 1$ Veränderliche durch die übrigen und durch $m + 1$ Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ ausdrücken sollte.

Wir sehen also: es lassen sich, je nach dem die gegebenen Functionen mehrerer Veränderlichen unabhängig von einander oder nicht unabhängig sind, eben so viele oder nicht eben so viele der Veränderlichen durch die übrigen und durch diese Functionen ausdrücken oder es sind umgekehrt Functionen unabhängig von einander oder nicht unabhängig, je nach dem man eben so viele oder nicht eben so viele der Veränderlichen durch die übrigen und durch die vorgelegten Functionen ausdrücken kann. Als Corollar ergiebt sich, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen die Anzahl der Veränderlichen, die sie enthalten, nicht übertreffen kann.

Ist die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen kleiner als die Anzahl der Veränderlichen, die sie enthalten, so kann man zwar eben so viele Veränderliche durch die übrigen und durch die vorgelegten Functionen bestimmen, darf jedoch diese Veränderlichen nicht immer willkürlich auswählen. Wenn etwa die beiden Veränderlichen x und x_1 in den vorgelegten Functionen nur in der binomischen Verbindung $x + x_1$ anzutreffen sind, so ist es augenscheinlich unmöglich, x und x_1, jedes einzeln für sich, durch diese Functionen und durch die übrigen Veränderlichen auszudrücken.

So oft $x, x_1, \ldots, x_m$ sich durch die übrigen x_{m+1} u. s. w. und die Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ ausdrücken lassen, kann zwischen den Grössen

$$f, f_1, \ldots, f_m, \quad x_{m+1}, \ldots, x_n$$

[**327**] keine Gleichung bestehen, die durch die Substitution der Ausdrücke der Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ zu einer identischen wird. Sonst könnte man nämlich mit Hülfe dieser Gleichung auch noch eine der Veränderlichen x_{m+1}, x_{m+2} u. s. w., etwa x_{m+1}, durch die Grössen $f, f_1, \ldots, f_m, x_{m+2}$,

$x_{m+3}, \ldots, x_n$ ausdrücken, und es würden daher durch die vorgelegten $m+1$ Gleichungen (1) $m+2$ Grössen $x, x_1, \ldots, x_{m+1}$ bestimmt werden, was unmöglich ist.

Wenn umgekehrt zwischen den von einander unabhängigen Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ und den Veränderlichen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ keine Gleichung besteht, die durch die Substitution der Ausdrücke der Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ zu einer identischen wird, kann man $x, x_1, \ldots, x_m$ durch die Grössen

(403) $$f, f_1, \ldots, f_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$$

ausdrücken. Wir sahen nämlich in dem vorhergehenden Paragraphen, dass die Unbekannten $x, x_1, \ldots, x_m$, wenn sie durch die Gleichungen (1) nicht bestimmt werden, unter allen Umständen aus den Gleichungen (1) eliminirt werden können. Hierdurch würde aber eine Gleichung zwischen $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ oder $f, f_1, \ldots, f_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ hervorgehen, und das widerspricht der Voraussetzung, die wir gemacht haben.

Wenn $m+1$ von einander unabhängige Functionen von $n+1$ Veränderlichen gegeben sind, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass nicht nur zwischen diesen Functionen allein keine Gleichung besteht, sondern dass es auch immer unter den $n+1$ Veränderlichen $n-m$ giebt, zwischen denen und den vorgelegten Functionen keine Gleichung besteht oder dass nicht nur keine der von einander unabhängigen Functionen durch die übrigen Functionen, sondern auch nicht durch jene $n-m$ Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Die $m+1$ von einander unabhängigen Functionen, durch die in Verbindung mit den übrigen Veränderlichen die gleiche Anzahl von Grössen $x, x_1, \ldots, x_m$ ausgedrückt werden kann, darf man nach der oben vorgeschlagenen Benennung als Functionen bezeichnen, die in Bezug auf die Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_m$ unabhängig von einander sind, denn zwischen ihnen kann keine von diesen Veränderlichen freie Gleichung bestehen. Man kann die gegebenen Functionen an Stelle der Veränderlichen, in Bezug auf die sie unabhängig sind, als unabhängige Veränderliche nehmen und als solche in andre Functionen einführen; es geschieht das, indem diese Veränderlichen durch die Functionen und die andern Veränderlichen, welche die Functionen enthalten, ausgedrückt werden.

5.

Sind die $n+1$ Functionen

$$f, f_1, \ldots, f_n$$

von eben so vielen Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt, so bilde man die partiellen Differentiale aller dieser Functionen nach allen Veränderlichen. Es entstehen so die $(n+1)^2$ Grössen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

[**328**] Die Determinante, die zu dem Systeme dieser Grössen gehört:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

nenne ich die Functionaldeterminante oder genauer die Determinante, die zu den Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ gehört oder die in Bezug auf die Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ gebildete Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$[6]. Hat man nämlich mehrere Systeme von Veränderlichen und nimmt bald das eine, bald das andre für die unabhängigen Veränderlichen, so muss man sorgfältig (**404**) angeben, in Bezug auf welche Veränderliche die Functionen differentiirt oder die Functionaldeterminante gebildet werden soll. Hat man nur eine Function, so geht die Functionaldeterminante in den Differentialquotienten der Function über[7].

Im allgemeinen ist der Grad der Determinante (4*) eben so gross wie die Anzahl der Functionen. So oft jedoch mehrere der gegebenen Functionen den Veränderlichen gleich sind, vermindert sich der Grad der Determinante. Ist zum Beispiel

$$f_{m+1} = x_{m+1}, f_{m+2} = x_{m+2}, \ldots, f_n = x_n,$$

so wird die vorher angegebene Functionaldeterminante gleich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Wenn alle vorgelegten Functionen der Reihe nach gleich den einzelnen Veränderlichen sind, so wird die vorliegende Determinante gleich der Einheit. Wenn die Functionen

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$$

beliebige Functionen von $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ sind, die $x, x_1, \ldots, x_m$ nicht enthalten, so wird die vorliegende Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Das alles folgt aus den Sätzen, die ich (5*) bewiesen habe, wenn man nur $a_k^{(i)}$ an die Stelle von

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

setzt.

6.

An der Schwelle der Untersuchungen über die Functionaldeterminanten tritt uns folgender Lehrsatz entgegen:

Die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind, verschwindet, und Functionen, deren Determinante verschwindet, sind nicht unabhängig von einander.

Wir wollen zuerst beweisen, dass die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind, verschwindet.

Es seien $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander, es bestehe vielmehr zwischen ihnen die Gleichung

$$\Pi(f, f_1, \ldots, f_n) = 0,$$

[329] die zu einer identischen wird, wenn man für $f, f_1, \ldots, f_n$ die Ausdrücke in den Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ einsetzt, denen sie gleich sind. Differentiirt man die vorhergehende Gleichung nach den einzelnen Veränderlichen, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$(405) \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n},$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}.$$

Diese $n+1$ Gleichungen lassen sich ansehen als ein System linearer Gleichungen zwischen der gleichen Anzahl von Unbekannten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f}, \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial f_n},$$

bei dem die constanten Glieder gleich Null sind. Bei einem solchen Systeme muss bekanntlich (7*) die Determinante verschwinden, falls nicht etwa alle Unbekannten gleichzeitig verschwinden. Es können aber nicht alle Grössen $\frac{\partial \Pi}{\partial f}$ u. s. w. gleichzeitig verschwinden, denn das würde bedeuten, dass Π von allen $f, f_1, \ldots, f_n$ frei wäre. So oft also die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander sind, muss

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

werden. Und das war zu beweisen.

7.

Etwas umständlicher gestaltet sich der strenge Beweis der Umkehrung, dass die Functionen nicht unabhängig von einander sind, so oft die Determinante verschwindet. Ich werde diesen Beweis in der Art führen, dass ich zunächst zeige, wenn das so eben ausgesprochene Theorem für n Functionen richtig ist, muss es auch für $n+1$ Functionen richtig sein. Mithin wird der Lehrsatz für eine beliebige Anzahl von Functionen gelten, sobald er für zwei Functionen erhärtet ist.

Wir wollen mit

$$A, A_1, \ldots, A_n$$

die Ausdrücke bezeichnen, die man in der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

multiplicirt findet. [**330**] (**406**) Dann hat man die identischen Gleichungen (6*):

$$(1)\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial x_1} A_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} A_n,$$

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x} A + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} A_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} A_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{\partial f_n}{\partial x} A + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} A_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} A_n. \end{cases}$$

Wir wollen annehmen, dass die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig von einander sind; sind sie es nämlich nicht, so gilt bereits, was wir beweisen wollen, dass die vorgelegten Functionen nicht unabhängig von einander sind. Man kann nun n von den Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_n$, durch x und $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausdrücken, so dass $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig von einander sind (siehe §. 4).

Führt man diese Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in die Function f ein, so wird f eine Function der Veränderlichen

$$x, f_1; f_2, \ldots, f_n.$$

Die partiellen Differentiale in Bezug auf diese Veränderlichen wollen wir in Klammern einschliessen. Dann wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

und ferner, wenn i irgend einen der Indices $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so erkennt man, dass die Ausdrücke, die der Reihe nach mit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right), \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right)$$

multiplicirt sind, wegen der Formeln (2) identisch verschwinden. Mithin ergiebt sich die bemerkenswerthe Formel:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) A$$

oder

$$(3)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Verschwindet also die Determinante auf der linken Seite, so muss entweder $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ oder die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A$$

verschwinden.

(**407**) Wir setzen voraus, dass die Behauptung für n Functionen gilt oder dass n Functionen nicht unabhängig von einander sind, wenn ihre Determinante verschwindet. Mithin würden, wenn die vorhergehende Determinante A verschwände, die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht unabhängig von einander sein, und das widerspricht der Voraussetzung, die wir gemacht haben. [**331**] Folglich muss der andre Factor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ verschwinden, und hieraus folgt, dass f allein durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ohne die Veränderliche x ausgedrückt werden kann. Mithin sind die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander, was zu beweisen war.

Nachdem wir die Behauptung für $n + 1$ Functionen bewiesen haben, sobald sie für n Functionen gilt, wird sie allgemein gelten, sobald sie für zwei Functionen erhärtet ist. Das geschieht folgendermaassen.

Es seien f und f_1 Functionen von x und x_1, deren Determinante verschwindet, oder es sei identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0.$$

Nun ist f_1 entweder eine Constante oder enthält wenigstens eine der beiden Veränderlichen, etwa x_1, und dann lässt sich x_1 durch x und f_1 ausdrücken. Setzt man diesen Ausdruck in f ein, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$

mithin

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} .$$

Der zweite Factor $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ verschwindet nicht, da wir voraussetzen, dass f_1 gerade x_1 enthalten soll, mithin ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 ,$$

oder die Function f, ausgedrückt durch x und f_1, wird frei von x_1 und ist eine Function von f_1 allein. Hiermit ist dargethan: So oft die Identität

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

besteht, ist entweder f_1 eine Constante oder f eine Function von f_1, und es sind also die Functionen f, f_1 nicht unabhängig von einander. Und das war zu beweisen.

Aus dem Lehrsatze, dass die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind, verschwindet, folgt, dass Functionen, deren Determinante nicht verschwindet, unabhängig von einander sind. (**408**) Aus dem Lehrsatze, dass Functionen, deren Determinante verschwindet, nicht unabhängig von einander sind, folgt, dass die Determinante von Functionen, die unabhängig von einander sind, nicht verschwindet ([8]).

Hätte man nur eine Function, so würden die im Vorhergehenden bewiesenen Lehrsätze darauf zurückkommen, dass eine Function constant ist oder nicht constant ist, je nach dem ihr Differential verschwindet oder nicht verschwindet. Umgekehrt lehrt das Vorhergehende, dass dieser Lehrsatz auf Systeme von Functionen mehrerer [**332**] Veränderlichen ausgedehnt werden kann, wenn an die Stelle der Bedingung, dass die Function constant sein soll, die Bedingung gesetzt wird, dass die Functionen nicht unabhängig von einander sein sollen, und wenn ferner an die Stelle des Differentials die Functionaldeterminante gesetzt wird.

8.

Es mögen $f, f_1, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen, und es sei folgendes System linearer Gleichungen vorgelegt:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} r + \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} r_n = s, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} r + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} r_n = s_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} r + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} r_n = s_n, \end{cases}$$

oder auch dieses:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} t + \frac{\partial f_1}{\partial x} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x} t_n = u, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} t_n = u_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} t_n = u_n. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist immer möglich und bestimmt. Es werden nämlich nach der bekannten Theorie der linearen Gleichungen lineare Gleichungen nur dann unmöglich oder unzureichend zur Bestimmung der Unbekannten, wenn ihre Determinante verschwindet (7*). Dass jedoch die Determinante der Gleichungen (1) oder (2):

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

sobald die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ unabhängig von einander sind, nicht verschwindet, habe ich in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesen.

(**409**) Die Lösung der Gleichungen (1) oder (2) ergiebt sich durch folgendes Verfahren. Da $f, f_1, \ldots, f_n$ unabhängig von einander sind, lassen sich x, x_1 u. s. w. durch f, f_1 u. s. w. ausdrücken. Setzt man diese Ausdrücke in irgend eine andre Function φ von x, x_1 u. s. w. ein, so geht sie in eine Function von f, f_1 u. s. w. über, und es ist das partielle Differential von φ nach der Grösse f_k:

$$(3)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_k}.$$

[**333**] Mithin ergiebt sich, wenn $\varphi = f_i$ gesetzt wird, je nach dem k gleich i oder k von i verschieden ist:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = 1\,, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_k} = 0\,. \end{cases}$$

Wenn man in dem Ausdrucke, der x_k durch f, f_1 u. s. w. darstellt, für f, f_1 u. s. w. die vorgelegten Ausdrücke einsetzt, so wird er identisch gleich x_k. Mithin erhält man durch Differentiation dieses Ausdruckes nach x_k oder nach einer andern Veränderlichen x_i die Einheit oder Nichts, oder es wird:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_k}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial x_k}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial x_k}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 1\,, \\ \frac{\partial x_k}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial x_k}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial x_k}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man (1) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial x_k}{\partial f}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial f_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_k}{\partial f_n}$$

und addirt, so wird mit Hülfe der Gleichungen (5):

$$(6)\qquad r_k = \frac{\partial x_k}{\partial f} s + \frac{\partial x_k}{\partial f_1} s_1 + \cdots + \frac{\partial x_k}{\partial f_n} s_n\,.$$

Multiplicirt man (2) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial x}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial f_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial f_i}$$

und addirt, so wird mit Hülfe der Gleichungen (4):

$$(7)\qquad t_i = \frac{\partial x}{\partial f_i} u + \frac{\partial x_1}{\partial f_i} u_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial f_i} u_n\,.$$

Diese Formeln liefern folgende Lehrsätze:

(**410**) I. Sind $f, f_1, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, und wird folgendes System linearer Gleichungen vorgelegt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} r + \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} r_n = s,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} r + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} r_n = s_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x} r + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} r_n = s_n,$$

so ist ihre Lösung immer möglich und bestimmt, und zwar sind die Werthe der Unbekannten:

[334]
$$r = \frac{\partial x}{\partial f} s + \frac{\partial x}{\partial f_1} s_1 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial f_n} s_n,$$
$$r_1 = \frac{\partial x_1}{\partial f} s + \frac{\partial x_1}{\partial f_1} s_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial f_n} s_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n = \frac{\partial x_n}{\partial f} s + \frac{\partial x_n}{\partial f_1} s_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial f_n} s_n.$$

II. Sind $f, f_1, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, und wird folgendes System linearer Gleichungen vorgelegt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} t + \frac{\partial f_1}{\partial x} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x} t_n = u,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} t_n = u_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} t_n = u_n,$$

so ist ihre Lösung immer möglich und bestimmt, und zwar sind die Werthe der Unbekannten:

$$t = \frac{\partial x}{\partial f} u + \frac{\partial x_1}{\partial f} u_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial f} u_n,$$
$$t_1 = \frac{\partial x}{\partial f_1} u + \frac{\partial x_1}{\partial f_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial f_1} u_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n = \frac{\partial x}{\partial f_n} u + \frac{\partial x_1}{\partial f_n} u_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial f_n} u_n.$$

Aus diesen Lehrsätzen ergeben sich die Folgerungen:

III. Sind $f, f_1, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, so folgt aus den Gleichungen

(411)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} r + \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} r_n = 0\,,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x} r + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} r_n = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial x} r + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} r_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} r_n = 0
\end{aligned}$$

mit Nothwendigkeit

$$r = 0,\ r_1 = 0,\ \ldots,\ r_n = 0.$$

IV. Sind $f, f_1, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, so folgt aus den Gleichungen

[335]
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} t + \frac{\partial f_1}{\partial x} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x} t_n = 0\,,\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} t_n = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_n} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} t_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} t_n = 0
\end{aligned}$$

mit Nothwendigkeit

$$t = 0,\ t_1 = 0,\ \ldots,\ t_n = 0.$$

Wenn wir in dem Lehrsatze I. oder II. die vorgelegten und die gelösten linearen Gleichungen genauer betrachten, so erkennen wir, dass die einen aus den andern hervorgehen, indem die Unbekannten r oder t mit den constanten Gliedern s oder u und gleichzeitig die Differentialquotienten $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ mit den Differentialquotienten $\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ vertauscht werden. Das liefert eine bequeme Regel für die Auflösung solcher linearen Gleichungen.

Gleichzeitig zeigen die vorhergehenden Formeln, wie man die Differentialquotienten $\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ aus den Differentialquotienten $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ erhält. Vergleicht man nämlich die vorhergehenden Formeln mit denen, welche die bekannten algebraischen Algorithmen für die Auflösung der linearen Gleichungen ergeben, so wird, wenn man die Determinante

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

bildet:

$$(8) \qquad R \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i} = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f_i}{\partial x_k}},$$

(**412**) oder es wird $R \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ gleich dem Aggregate der Glieder, das man in der Determinante R mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ multiplicirt findet; es wird mithin zum Beispiel

$$(9) \qquad R \cdot \frac{\partial x}{\partial f} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

9.

Mit Hülfe der Formel (8) des vorhergehenden Paragraphen kann man einen für die Berechnung geeigneten Ausdruck der partiellen Differentiale einer Functionaldeterminante erhalten, den wir anführen wollen.

Handelt es sich darum, R nach irgend einer Grösse a zu differentiiren, die eine der Veränderlichen x, x_1 u. s. w. oder irgend eine andre Grösse ist, welche die Functionen [**336**] f, f_1 u. s. w. enthalten, so wird

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f_i}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_k};$$

unter dem Zeichen Σ sind den beiden Indices i und k alle Werthe $0, 1, 2, \ldots, n$ zu ertheilen. Diese Formel geht mittelst (8) des vorhergehenden Paragraphen in folgende über:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = R \Sigma \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \cdots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial \frac{\partial f_i}{\partial a}}{\partial f_i},$$

und es ergiebt sich mithin die Formel

$$(1) \qquad \frac{\partial \log R}{\partial a} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial a}}{\partial f} + \frac{\partial \frac{\partial f_1}{\partial a}}{\partial f_1} + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial f_n}{\partial a}}{\partial f_n}.$$

Um $\frac{\partial \log R}{\partial a}$ zu erhalten, hat man also von den vorgelegten Ausdrücken $f, f_1, \ldots, f_n$ einen jeden f_i nach a zu differentiiren, das Differential durch $f, f_1, \ldots, f_n$ auszudrücken und diesen Ausdruck nach f_i zu differentiiren: das Aggregat aller dieser $n+1$ Differentiale ist gleich

$$\frac{\partial \log R}{\partial a}\,{}^{9)}.$$

Wie ich in §. 11 der Abhandlung über die Determinanten bewiesen habe, wird, wenn man die

$$R = \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)},$$

$$A_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}$$

setzt,

$$(413) \quad \Sigma \pm A A_1' \ldots A_m^{(m)} = R^m \Sigma \pm a_{m+1}^{(m+1)} a_{m+2}^{(m+2)} \ldots a_n^{(n)}.$$

Bei der Annahme

$$a_k^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

wird nach (8) des vorhergehenden Paragraphen

$$A_k^{(i)} = R \frac{\partial x_k}{\partial f_i}.$$

Setzt man diese Werthe ein und dividirt mit R^m, so geht die vorstehende Formel über in diese:

$$(2) \quad R \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial f_m} = \Sigma \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich viele andre, wenn man die Indices der x oder der f permutirt.

Setzt man $m = n$, so ergiebt sich an dem angegebenen Orte die Formel

$$\Sigma \pm A A_1' \ldots A_n^{(n)} = R^n.$$

(**337**) Mithin geht in diesem Falle (2) in folgende Formel über:

$$R \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = 1$$

oder

$$(3) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}\ ^{10)}.$$

Hat man eine Function f einer Veränderlichen x und drückt umgekehrt x durch f aus, so hat das Differential von x nach f den reciproken Werth des Differentials der Function f nach x. In ähnlicher Weise lehrt die vorstehende Formel: Hat man $n + 1$ Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ von eben so vielen Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ und drückt umgekehrt $x, x_1, \ldots, x_n$ durch $f, f_1, \ldots, f_n$ aus, so hat die Functionaldeterminante von $x, x_1, \ldots, x_n$ in Bezug auf $f, f_1, \ldots, f_n$ den reciproken Werth der Functionaldeterminante von $f, f_1, \ldots, f_n$ in Bezug auf $x, x_1, \ldots, x_n$.

10.

Das Vorhergehende lehrt, wie man die Functionaldeterminante erhält, wenn nicht die expliciten Ausdrücke der Functionen, sondern umgekehrt die Variabeln dargestellt durch die Functionen gegeben sind. Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeineren, die Functionaldeterminante zu finden, (**414**) wenn die Functionen durch Gleichungen zwischen den Functionen und den vorgelegten Veränderlichen definirt sind oder wenn die Functionen implicite gegeben werden.

Es mögen die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ von $x, x_1, \ldots, x_n$ durch folgende Gleichungen zwischen allen diesen $2n + 2$ Grössen definirt werden

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0.$$

Setzt man die durch $x, x_1, \ldots, x_n$ dargestellten Ausdrücke der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ ein, die aus diesen Gleichungen hervorgehen, so wird jede der Gleichungen

$$F_i = 0$$

zu einer Identität, und differentiirt man diese Gleichung nach einer beliebigen Veränderlichen x_k, so ergiebt sich

$$(1)\quad 0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k}.$$

Wir wollen

$$(2)\qquad \frac{\partial F_i}{\partial f_m} = \alpha_m^{(i)}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_k} = a_m^{(k)}.$$

setzen. [**338**] Es sei ferner

$$\alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} + \cdots + \alpha_n^{(i)} a_n^{(k)} = c_k^{(i)}.$$

Dann folgt aus (1):

$$(3)\qquad c_k^{(i)} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}.$$

Nun hat man die bekannte Formel (13*):

$$\Sigma \pm c\, c_1' c_2'' \cdots c_n^{(n)} = \Sigma \pm \alpha\, \alpha_1' \alpha_2'' \cdots \alpha_n^{(n)} \cdot \Sigma \pm a\, a_1' a_2'' \cdots a_n^{(n)}.$$

Mithin kommt durch Substitution von (2) und (3):

$$(4)\quad (-1)^{n+1} \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Diese Formel liefert als Werth der gesuchten Functionaldeterminante

$$(5)\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$ [1]

Wird eine Function f einer Veränderlichen x durch eine Gleichung

$$F(f, x) = 0$$

definirt, so erhält man das Differential der Function f nach der Veränderlichen x, wenn man (**415**) die Differentiale von F nach f und x durch einander dividirt und das negative Vorzeichen vorsetzt. Auf ganz ähnliche Art ist, wie die Formel (5) lehrt, die Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ in Bezug auf die Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, wenn die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ durch die Gleichungen

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0$$

definirt werden, gleich dem Quotienten der Determinanten von $F, F_1, \ldots, F_n$ in Bezug auf $f, f_1, \ldots, f_n$ und in Bezug auf $x, x_1, \ldots, x_n$, wobei das Zeichen $+$ oder $-$ vorzusetzen ist, je nach dem die Anzahl der f, f_1 u. s. w. gerade oder ungerade ist.

Aus der allgemeinen Formel (5) folgt die in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesene als Corollar. Wir haben nämlich den Lehrsatz gefunden: Sind zwischen $x, x_1, \ldots, x_n, f, f_1, \ldots, f_n$ die Gleichungen $F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0$ gegeben, und drückt man $f, f_1, \ldots, f_n$ durch $x, x_1, \ldots, x_n$ aus, so wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

Mithin muss, wenn $x, x_1, \ldots, x_n$ durch $f, f_1, \ldots, f_n$ ausgedrückt werden, nach eben diesem Lehrsatze

$$[339] \quad \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}$$

werden, folglich ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

und das zeigte ich in dem vorhergehenden Paragraphen.

11.

Wir wollen annehmen, dass die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unmittelbar durch die Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, sondern durch Functionen dieser Veränderlichen

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$$

gegeben werden. Es sei

$$(1) \qquad a_m^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_m}, \quad a_m^{(k)} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}.$$

(**416**) Setzt man

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} + \cdots + \alpha_p^{(i)} a_p^{(k)} \ldots$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_k},$$

so ist also

$$(2) \qquad c_k^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

In der Abhandlung über Determinanten §. 13 flg. haben wir gefunden: Es ist für $p < n$:

$$(3) \qquad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_n^{(n)} = 0,$$

für $p = n$:

$$(4) \quad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_n^{(n)} = \Sigma \pm \alpha \alpha_1' \alpha_2'' \ldots \alpha_n^{(n)} \cdot \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)},$$

für $p > n$:

$$(5) \quad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_n^{(n)} = S \left\{ \Sigma \pm \alpha_m \alpha_{m'}' \ldots \alpha_{m^{(n)}}^{(n)} \cdot \Sigma \pm a_m a_{m'}' \ldots a_{m^{(n)}}^{(n)} \right.$$

wo das Zeichen S sich auf sämmtliche Combinationen bezieht, bei denen für die Indices $m, m', \ldots, m^{(n)}$ $n+1$ verschiedene Indices aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p$ genommen werden. Setzt man für die Elemente

$$\alpha_m^{(i)}, \quad a_m^{(k)}, \quad c_k^{(i)}$$

die partiellen Differentiale (1) und (2) ein, so erhält man aus diesen drei Formeln (3), (4), (5) folgende drei Lehrsätze:

[340] Lehrsatz I.

Die Determinante von Functionen, die alle durch eine kleinere Anzahl von Functionen ausgedrückt werden können, verschwindet.

Dieser Lehrsatz bestätigt, was wir oben bewiesen haben; so oft man nämlich vorgelegte Functionen durch eine kleinere Anzahl andrer Grössen ausdrücken kann, sind die Functionen nicht unabhängig von einander (§. 4), es verschwindet aber die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind (§. 6).

Lehrsatz II.

Es seien $f, f_1, \ldots, f_n$ Functionen der Grössen φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, die ihrerseits Functionen der Grössen x, $x_1, \ldots, x_n$ sind, sodass $f, f_1, \ldots, f_n$ auch als Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ angesehen werden können. Dann ist die Determinante dieser Functionen gleich dem Producte der Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ in Bezug auf $\varphi, \varphi, \ldots, \varphi_n$ und der Determinante der Functionen (417) $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in Bezug auf $x, x_1, \ldots, x_n$, oder es wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Dieser Lehrsatz entspricht durchaus dem Lehrsatze, in den er für $n = 0$ übergeht: Ist f eine Function von y und y eine Function von x, so wird

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

und die Einfachheit der Formel wird gar nicht vermindert, wenn man die Differentiale durch Functionaldeterminanten ersetzt.

Lehrsatz III.

Es seien $f, f_1, \ldots, f_n$ Functionen der Grössen φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, die selbst Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ sind, und p grösser als n. Man bilde das Product der beiden Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

und alle ähnlichen Producte für irgend $n+1$ der $p+1$ Functionen $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Dann ist die Summe aller dieser Producte gleich der Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ in Bezug auf $x, x_1, \ldots, x_n$, oder es wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= S\left\{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right\}.$$

[**341**] Dieser Lehrsatz entspricht dem Lehrsatze, dass man das Differential einer Function von mehreren Grössen erhält, indem man die Differentiale der Function nach den einzelnen Grössen der Reihe nach mit den Differentialen der einzelnen Grössen multiplicirt und alle Producte addirt.

Aus dem Lehrsatze II. ergiebt sich als Corollar der folgende, in dem ich an die Stelle von φ das Element y gesetzt habe:

Lehrsatz IV.

Es seien $f, f_1, \ldots, f_n$ Functionen der Grössen $y, y_1, \ldots, y_n$. Drückt man $f, f_1, \ldots, f_n$ und $y, y_1, \ldots, y_n$ durch andre Grössen

$$x, x_1, \ldots, x_n$$

aus, so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}}.$$

(**418**) Dieser Lehrsatz entspricht dem Lehrsatze, dass es bei dem Ausdrucke $\frac{df}{dy}$ gleichgültig ist, welches die Veränderliche ist, nach der differentiirt wird, oder dass man, wenn f und y durch eine andre Veränderliche x ausgedrückt werden:

$$\frac{df}{dy} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$$

erhält. Wenn man in dem Lehrsatze IV. $f = x$, $f_1 = x_1$, $f_n = x_n$ setzt, kommt man wieder auf die Formel (3) §. 9.

12.

Aus den Lehrsätzen des vorhergehenden Paragraphen erhält man weitere Lehrsätze, die angemerkt zu werden verdienen.

Setzen wir in dem Lehrsatze II. des vorhergehenden Paragraphen

$$\varphi = x,\ \varphi_1 = x_1,\ \ldots,\ \varphi_m = x_m,$$

so wird nach §. 5:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Mithin zeigt der Lehrsatz II.: Werden in der Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

statt x_{m+1}, x_{m+2}, $\ldots$, x_n andre Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, x_1, $\ldots$, x_n:

$$\varphi_{m+1},\ \varphi_{m+2},\ \ldots,\ \varphi_n$$

[342] als unabhängige Veränderliche eingeführt, so wird

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ &= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \\ &\times \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}. \end{aligned}\right.$$

Führt man nur statt der einen Veränderlichen x_n eine andre Veränderliche φ ein, so wird

$$(2)\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \varphi}.$$

Wird ausserdem in der Formel (1):

$$\varphi_{m+1} = f_{m+1},\ \varphi_{m+2} = f_{m+2},\ \ldots,\ \varphi_n = f_n$$

gesetzt, (**419**) so wird nach §. 5:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Hieraus folgt der besonders bemerkenswerthe Lehrsatz: Werden in den Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ statt der Veränderlichen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ die Grössen $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$ eingeführt, so wird die Functionaldeterminante

$$(3) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Bei dieser Formel ist wohl zu beachten, dass die erste der beiden mit einander multiplicirten Determinanten in Bezug auf $x, x_1, \ldots, x_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$ gebildet ist, während in der zweiten $f_{m+1}, f_{m+2} \ldots, f_n$ als Functionen der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ angesehen werden.

Aus der vorhergehenden Formel folgt für $m = 0$:

$$(4) \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n};$$

die Klammern sollen andeuten, dass f als Function von x, $f_1, f_2, \ldots, f_n$[12]) angesehen wird. Diese Formel habe ich schon oben in §. 7 bewiesen.

Sind die Functionen $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n$ von $x, x_1, \ldots, x_n$ gegeben, und drückt man $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ durch $x, x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n$ aus, so wird nach §. 9 (3):

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n}}.$$

In dieser Formel sind bei der Bildung der Functionaldeterminanten die Grössen $x, x_1, \ldots, x_m$ als Constanten anzusehen. Substituirt man die vorstehende Formel (**343**) in (1), so folgt: Werden die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ von $x, x_1, \ldots, x_n$ und eben so $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ ausgedrückt durch

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_m,\ \varphi_{m+1},\ \varphi_{m+2},\ \ldots,\ \varphi_n,$$

so wird

$$(5)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{d x_m} \cdot \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{d \varphi_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \cdots \frac{\partial x_n}{d \varphi_n}}.$$

(420) Ferner folgt aus (3): Werden

$$f,\ f_1,\ \ldots,\ f_m,\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n$$

durch die Grössen

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_m,\ f_{m+1},\ f_{m+2},\ \ldots,\ f_n$$

ausgedrückt, so wird

$$(6)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}}{\Sigma \pm \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+2}}{\partial f_{m+2}} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial f_n}}.$$

Die Formeln (5) und (6) lassen sich auch aus dem Lehrsatze IV. des vorhergehenden Paragraphen ableiten, indem man $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ an die Stelle von $y,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$ und $\varphi_{m+1},\ \varphi_{m+2},\ \ldots,\ \varphi_n$ oder $f_{m+1},\ f_{m+2},\ \ldots,\ f_n$ an die Stelle von $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n$ setzt[13].

13.

Unter der Annahme, dass die Functionen $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n$ von $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ durch $n+m+1$ Gleichungen

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots,\ F_{n+m} = 0$$

zwischen den Grössen $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n$ und den andern Grössen

$$f_{n+1},\ f_{n+2},\ \ldots,\ f_{n+m},$$

bestimmt werden, soll wiederum die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

ermittelt werden.

Aus den Gleichungen

$$F_{n+1} = 0,\ F_{n+2} = 0,\ \ldots,\ F_{n+m} = 0$$

wollen wir die Werthe von $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+m}$ entnehmen und sie in die Functionen $F, F_1, \ldots, F_n$ einsetzen; $F = 0$, $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ werden dann Gleichungen allein zwischen den Grössen

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n.$$

Bestimmt man mit Hülfe dieser Gleichungen $f, f_1, \ldots, f_n$ als Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$, so wird nach (5) §. 10:

[344]

$$(1)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

(421) Multipliciren wir den Zähler und den Nenner des Bruches auf der rechten Seite mit

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

so ist nach (3) in dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}.$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

wofern man auf der linken Seite der vorstehenden Gleichungen $F, F_1, \ldots, F_{n+m}$ wieder als die Functionen aller Grössen $f, f_1, \ldots, f_{n+m}, x, x_1, \ldots, x_n$ ansieht, als die sie gegeben sind.

Substituirt man die vorstehenden Formeln in (1), so ergiebt sich der gesuchte Ausdruck:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formel lehrt, wie man die Determinante von Functionen findet, die auf irgend eine Art implicite gegeben sind.

Wird die Function f der einen Veränderlichen x durch $m+1$ Gleichungen

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots,\ F_m = 0$$

zwischen den Grössen $x, f, f_1, \ldots, f_m$ bestimmt, so ist

$$(3)\qquad \frac{df}{dx} = -\frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial f_m}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial f_m}}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der allgemeinen (2), so erkennt man, dass auch hier zwischen dem ersten Differential einer Function einer Veränderlichen und der Determinante eines Systems mehrerer Veränderlichen vollständiges Entsprechen stattfindet.

[**345**] (**422**) 14.

Ich werde jetzt einen Lehrsatz beweisen, der besonders bemerkenswerth ist und der in Verbindung mit der Formel (2) des vorhergehenden Paragraphen die Berechnung der Functionaldeterminanten erheblich erleichtert. Wir wollen nämlich annehmen, dass zwischen den Grössen x, x_1, $\ldots$, x_n eben so viele Gleichungen

$$f = \alpha,\ f_1 = \alpha_1,\ \ldots,\ f_n = \alpha_n$$

gegeben sind, in denen α, α_1 u. s. w. Constanten bedeuten. Dann behaupte ich: Die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{dx_n}$$

ändert ihren Werth nicht, wenn die Functionen f, $f_1, \ldots, f_n$ die verschiedenen Veränderungen erleiden, die sie vermöge der vorgelegten Gleichungen erleiden können, jedoch mit der Beschränkung, dass bei der Aenderung der Function f_i die Gleichungen $f = \alpha$, $f_1 = \alpha_1, \ldots, f_i = \alpha_i$ nicht angewandt werden dürfen [14].

Wir wollen den vorhergehenden Lehrsatz zunächst für den Fall beweisen, dass nur die eine Function f vermöge der zwischen $x, x_1, \ldots, x_n$ bestehenden Gleichungen:

$$f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots, f_n = \alpha_n$$

eine Aenderung erleidet.

Nehmen wir also an, vermöge der Gleichungen

$$(1) \qquad f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots, f_n = \alpha_n$$

werde

$$(2) \qquad f = \varphi,$$

so ist zu beweisen, dass vermöge derselben Gleichungen

$$(3) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

wird. Die Function φ wird ausser den Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ enthalten und zwar so, dass φ genau in die vorgelegte Function f übergeht, wenn man für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wieder einsetzt. Mithin bestehen vermöge der Gleichungen (1) die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}. \end{cases}$$

[346] (423) Substituirt man sie in der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

so gewinnt man folgenden Ausdruck:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Da jedoch die einzelnen Determinanten, mit denen die einzelnen Factoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}$$

multiplicirt sind, identisch verschwinden, so wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Setzt man nämlich in den Differentialen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ wieder die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ein, so geht die Determinante auf der rechten Seite identisch in die Determinante auf der linken Seite über.

Nunmehr soll auch f_1 geändert werden, und zwar möge bei Benutzung der Gleichungen

$$f_2 = \alpha_2, f_3 = \alpha_3, \ldots, f_n = \alpha_n$$

sich ergeben:

$$f_1 = \varphi_1.$$

Dann beweist man auf dieselbe Art, dass

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

und mithin auch

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

wird.

Fährt man in dieser Art fort, so folgt allgemein: Vermöge der Gleichungen

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}\,,\ f_{i+2} = \alpha_{i+2}\,,\ \ldots,\ f_n = \alpha_n$$

(**424**) werde

$$f_i = \varphi_i\,.$$

Dann wird vermöge der Gleichungen

$$f = \alpha\,,\ f_1 = \alpha_1\,,\ \ldots,\ f_n = \alpha_n$$

$$(5)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\,.$$

[**347**] Setzt man nämlich in allen

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

für die Constanten α, α_1, α_2, ..., α_n wiederum die Functionen f, f_1, f_2, ..., f_n ein, so geht die eine Functionaldeterminante identisch in die andre über.

[Zusatz aus der Abhandlung: Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi (1844).]

[337] *) Bei der Anwendung dieses Lehrsatzes hat man die Functionen f, f_1, ..., f_n oder die Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, ..., $f_n = 0$ in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen und zwar dergestalt, dass eine jede Gleichung $f_i = 0$ mittelst der folgenden Gleichungen eine bequeme Form annehmen kann, und dass zugleich die partiellen Differentiale der Function f_i möglichst einfach ausfallen.

Dieses Verfahren kann man sogar beliebig oft wiederholen, indem man zunächst die geeigneten Umgestaltungen bei einer bestimmten Reihenfolge der Functionen und Gleichungen vornimmt, darauf die Functionen anders und immer wieder anders anordnet und bei jeder neuen Anordnung die passenden Aenderungen oder Eliminationen vornimmt. Wie man aber auch die vorgelegten Functionen f, f_1 u. s. w. mittelst dieser verschiedenen Anordnungen und Eliminationen ändern mag, so erhält man dadurch doch nicht die Aenderungen der Functionen, die sich ergeben können, wenn man, um eine jede Function umzugestalten, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der Functionen gleichzeitig alle n Gleichungen anwendet, die entstehen, indem alle übrigen Functionen gleich

*) Im Folgenden schreibt *Jacobi* f, f_1, ..., f_n statt $f - \alpha$, $f_1 - \alpha_1$, ..., $f_n - \alpha_n$. Anmerkung des Herausgebers.

Null gesetzt werden. Denn bei dem Lehrsatze gab es nur eine der $n+1$ Functionen, bei deren Umgestaltung n Gleichungen angewandt werden durften; ausser dieser gab es nur eine, bei deren Umgestaltung $n-1$ Gleichungen angewandt werden durften, und so fort. Bringt man die Functionen in eine andre und andre Reihenfolge und wendet bei jeder neuen Anordnung den Lehrsatz an, so kann man zwar bewirken, dass eine jede Function [338] einmal mit Hülfe von n Gleichungen umgestaltet wird, der Unterschied besteht aber darin, dass bei diesem Verfahren die Gleichungen, die bei der Umgestaltung anzuwenden sind, nicht mehr erhalten werden, indem man die vorgelegten Functionen gleich Null setzt, sondern Functionen, die schon ihrerseits umgestaltet sind.

Wird etwa f durch die Gleichung $f_1 = 0$ in φ verwandelt, und darauf f_1 durch die Gleichung $\varphi = 0$ in φ_1, so kann φ_1 nicht dieselben Formen annehmen, in die man f_1 verwandeln kann, wenn man die vorgelegte Function f gleich Null setzt. Bezeichnen wir nämlich, was erlaubt ist, den allgemeinen Werth der Function, in die f durch die Gleichung $f_1 = 0$ verwandelt werden kann, mit

$$\varphi = f + \lambda f_1$$

und eben so den allgemeinen Werth der Function, in die f_1 durch die Gleichung $\varphi = 0$ verwandelt wird, mit

$$\varphi_1 = f_1 + \mu\varphi = (1 + \lambda\mu) f_1 + \mu f,$$

so ist diese Function verschieden von der Function

$$f_1 + \mu f,$$

in die f_1 durch die Gleichung $f = 0$ verwandelt wird. Die Determinante der Functionen φ und φ_1 ist dieselbe wie die der vorgelegten Functionen, die Determinanten der Functionen $f + \lambda f_1$, $f_1 + \mu f$ ist jedoch davon durchaus verschieden, sie ist nämlich die Determinante der Functionen f und f_1, multiplicirt mit dem Factor $1 - \lambda\mu$.

Setzt man allgemein

$$\varphi_i = \lambda^{(i)} f + \lambda_1^{(i)} f_1 + \cdots + \lambda_n^{(i)} f_n,$$

so beweist man mittelst der Eigenschaften der Determinanten: Bestehen die Gleichungen

$$f = 0,\ f_1 = 0,\ \ldots,\ f_n = 0,$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \lambda\lambda_1'\lambda_2'' \cdots \lambda_n^{(n)} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Mithin hat man als die allgemeine Bedingung, dass die Determinanten der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ und $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ einander gleich werden:

$$\Sigma \pm \lambda\lambda_1' \cdots \lambda_n^{(n)} = 1.$$

Indem man den oben dargelegten Lehrsatz wiederholt auf andre und andre Anordnungen der Functionen anwendet, leitet man unzählig viele Systeme von Grössen

$$\lambda_k^{(i)}$$

her, die dieser Bedingung Genüge leisten[15]).

[347] (424) 15.

Ist die Anzahl der Veränderlichen, welche die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ enthalten, grösser als die Anzahl der Functionen, und sind diese Functionen nicht unabhängig von einander, so sind sie auch in Bezug auf beliebige $n+1$ der Veränderlichen nicht unabhängig von einander. Denn die Gleichung, die zwischen den Functionen besteht, enthält ausserdem überhaupt keine Veränderliche und ist daher auch von jenen $n+1$ beliebigen Veränderlichen frei. Aus dem, was in §. 6 und den folgenden bewiesen wurde, folgt daher: Sind die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$ nicht unabhängig von einander, so verschwinden alle ihre Determinanten in Bezug auf beliebige $n+1$ der $n+m+1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$. Es gilt aber auch die Umkehrung: Verschwinden alle diese Determinanten, so sind die vorgelegten Functionen nicht unabhängig von einander oder es besteht zwischen ihnen eine Gleichung, die von allen $n+m+1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$ frei ist.

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, zeigen wir wiederum, dass er für $n+1$ Functionen richtig ist, sobald er für n Functionen gilt, und das genügt, um den Lehrsatz allgemein zu beweisen, denn für eine Function besteht er. Für eine Function lautet er nämlich so: Eine Function f der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$ ist eine Constante, wenn ihre partiellen Differentiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}$$

sämmtlich verschwinden.

Wir wollen annehmen, dass die Functionen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ unabhängig von einander sind; wären nämlich die Functionen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ nicht unabhängig von einander, so würde bereits (425) das stattfinden, was wir zu beweisen vorhaben. Da nach der Voraussetzung die Behauptung für n Functionen richtig ist, können die Determinanten der Functionen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ in Bezug auf n Veränderliche aus der Zahl der

$x, x_1, \ldots, x_{n+m}$ nicht sämmtlich verschwinden, sonst wären nämlich nach diesem Lehrsatze die Functionen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ nicht unabhängig von einander. Es sei also

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

[348] eine nicht verschwindende Determinante. Aus allen Determinanten der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ wollen wir diejenigen auswählen, bei denen $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ unter den $n+1$ Grössen vorkommen, in Bezug auf welche die Functionaldeterminante gebildet wird, das heisst die Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+2}}, \ldots$$

$$\ldots, \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}.$$

Statt $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ führen wir f, f_1, f_{n-1} als unabhängige Veränderliche ein. Dann verwandeln sich nach dem, was in §. 7 bewiesen wurde, die vorhergehenden Determinanten in die Ausdrücke

$$B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right), \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}\right), \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+2}}\right), \quad \ldots, \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}\right);$$

durch die Klammern deute ich an, dass die zu differentiirende Function durch

$$f, f_1, \ldots, f_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$$

ausgedrückt ist. Verschwinden aber diese Ausdrücke, ohne dass B verschwindet, so muss

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}\right) = 0$$

sein, mithin wird f_n nur $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ in sich schliessen, es werden also die Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander sein, und das war zu beweisen.

Im Vorhergehenden haben wir bewiesen: Verschwinden die $m+1$ Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}, \cdots$$

$$\cdots, \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}},$$

und ist gleichzeitig die Determinante B oder

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

von Null verschieden, (**426**) so ist f_n eine Function von $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$. Ist aber f_n eine Function von $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$, so verschwinden, wie wir am Anfange dieses Paragraphen gesehen haben, die Determinanten der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ in Bezug auf beliebige $n+1$ von den Grössen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$. Die Anzahl dieser Determinanten ist

$$\frac{(n+m+1)(n+m)\cdots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} = \frac{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

Alle diese Determinanten müssen also verschwinden, sobald jene $m+1$ Determinanten verschwinden, wofern nur die Determinante B nicht verschwindet.

[**349**] 16.

Damit man besser erkennt, wie jene

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n+1)}$$

Determinanten mit einander verknüpft sind, die alle verschwinden müssen, sobald gewisse $m+1$ von ihnen verschwinden, füge ich folgende Formeln hinzu.

Wir wollen neue willkürliche Functionen

$$f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+m}$$

der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_{n+m}$ bilden und

$$(1) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}} = b_k^{(i)}$$

setzen; in dieser Formel sollen die beiden Indices i und k die Werthe

$$0, 1, 2, \ldots, m$$

annehmen. Führt man die Veränderlichen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ statt der $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ein, so wird, wie wir in dem vorhergehenden Paragraphen sahen:

$$(2) \qquad b_k^{(i)} = B\left(\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}}\right),$$

wofern wiederum

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

gesetzt wird.

Aus (2) folgt:

$$\Sigma \pm b b_1' b_2'' \cdots b_m^{(m)} = B^{m+1} \cdot \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}\right)^{16)}.$$

Nun folgt aber aus der Formel (3) §. 12 für den vorliegenden Fall:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}$$

$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}\right) \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

(**427**) mithin ist

$$(3) \qquad \Sigma \pm b b_1' b_2'' \cdots b_m^{(m)} = B^m \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}.$$

Diese Formel erweist sich bei Untersuchungen über Determinanten vielfach als nützlich.

Wir wollen

$$-\beta_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+k}} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

setzen oder es möge $-\beta_k^{(i)}$ aus der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

hervorgehen, indem man für die Differentiale nach x_i die Differentiale nach x_{n+k} [**350**] einsetzt; $\beta_k^{(i)}$ ist also das Aggregat der Glieder, die in dem Ausdrucke $b_k^{(i)}$ mit

$$\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_i}$$

multiplicirt sind. Hieraus folgt, dass das Aggregat, das in der Determinante

$$\Sigma \pm b\, b_1' \cdots b_m^{(m)}$$

mit

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m}$$

multiplicirt ist, gleich

$$\Sigma \pm \beta\, \beta_1' \cdots \beta_m^{(m)}$$

ist. Nun ist aber das Aggregat der Glieder, die in der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}$$

$$= (-1)^{n(m+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m}\,^{*)}$$

mit demselben Factor

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m}$$

(428) multiplicirt sind, gleich

$$(-1)^{n(m+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}}.$$

Vergleicht man die Glieder, die mit diesem Factor multiplicirt sind, so erhält man also aus (3):

$$(4) \qquad \Sigma \pm \beta \beta_1' \cdots \beta_m^{(m)}$$

$$= (-1)^{n(m+1)} B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}}.$$

Wir haben mithin folgenden Lehrsatz:

---

* Das Vorzeichen $(-1)^{n(m+1)}$ wird durch folgende Ueberlegung bestimmt. Verwandelt man $0, 1, 2, \ldots, p$ in $i, i+1, \ldots, p, 0, 1, \ldots, i-1$, so ist die Permutation positiv, wenn p gerade ist; ist aber p ungerade, so ist die Permutation $i, i+1, \ldots, p, 0, 1, \ldots, i-1$ positiv oder negativ, je nach dem i gerade oder ungerade ist. Mithin ist die zweite Permutation allgemein positiv oder negativ, je nach dem ip gerade oder ungerade ist. Siehe die Abhandlung über Determinanten.

Aus der Determinante

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

mögen $(m+1)^2$ andre Determinanten hergeleitet werden, indem man für jedes der Differentiale nach $x, x_1, \cdots, x_m$ der Reihe nach die Differentiale nach

$$x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$$

einsetzt. Dann ist die Determinante dieser $(m+1)^2$ Grössen gleich dem Ausdrucke

$$(-1)^{n(m+1)} B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}} .$$

[351] In der Formel (3) wollen wir die Glieder vergleichen, die mit dem Factor

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}}$$

multiplicirt sind. In dem Ausdrucke:

$$b_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}}$$

wird das Aggregat der Glieder, die mit

$$\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{i-1}}$$

multiplicirt sind:

$$-\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-2}} \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{n+k}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \beta_k^{(i-1)} .$$

Mithin wird auf der linken Seite der Formel (3) das Aggregat der Glieder, die mit dem betrachteten Factor multiplicirt sind:

$$\Sigma \pm b\, \beta_1 \beta_2' \cdots \beta_m^{(m-1)} .$$

(429) In der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}$$

$$= (-1)^{m(n+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}}$$

wird das Aggregat der Glieder, die mit demselben Factor multiplicirt sind:

$$(-1)^{m(n+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}} .$$

Mithin ergiebt sich aus (3) durch Vergleichung der Glieder, die mit

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}}$$

multiplicirt sind:

$$(5) \qquad \Sigma \pm b \beta_1 \beta_2' \cdots \beta_m^{(m-1)}$$

$$= (-1)^{m(n+1)} B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}} .$$

Auf dieselbe Art erhält man allgemein

$$(6) \qquad \Sigma \pm b b_1' \cdots b_{i-1}^{(i-1)} \beta_i \beta'_{i+1} \cdots \beta_m^{(m-i)}$$

$$= \pm B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m-i+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-i+2}} \cdots \frac{\partial f_{n+i-1}}{\partial x_{n+m}} ;$$

in dieser Formel ist das Zeichen $\pm$ durch $(-1)^{n(m+1)}$ oder durch $(-1)^{m(n+1)}$ zu ersetzen, je nach dem i gerade oder ungerade ist.

Die $m+1$ Determinanten, deren Verschwinden in dem vorhergehenden Paragraphen angenommen wurde, sind bei der hier angewandten Bezeichnungsweise

$$b, \; b_1, \; b_2, \; \cdots, \; b_m .$$

Die einzelnen Glieder der Determinante

$$\Sigma b \beta_1 \beta_2' \cdots \beta_m^{(m-1)}$$

[352] sind mit je einer dieser Grössen multiplicirt, wir wollen daher setzen:

$$\Sigma \pm b \beta_1 \beta_2' \cdots \beta_m^{(m-1)} = \lambda b + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n .$$

Die Grössen $\beta_h^{(i)}$, und daher auch die Factoren λ, sind von den Differentialen der Function f_n vollständig frei. Ferner

enthält von allen $b, b_1, \cdots, b_m$ einzig und allein b_k das Differential

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$$

und zwar mit B multiplicirt. Mithin wird in der vorhergehenden Determinante das Aggregat der mit $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicirten Glieder $\lambda_k B$.

(430) Setzen wir daher

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}$$
$$= \mu \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \mu_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \mu_m \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}},$$

wo μ_k das Aggregat der Glieder in der vorstehenden Determinante bezeichnet, die mit $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicirt sind, so folgt aus (5):

$$\lambda_k B = (-1)^{m(n+1)} B^m \mu_k,$$

und es ist daher

$$\Sigma \pm b \beta_1 \beta_2' \cdots \beta_m^{(m-1)}$$
$$= (-1)^{m(n+1)} B^{m-1} \{\mu b + \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_m b_m\}.$$

Mithin geht (5) über in:

(7) $$\mu b + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_m b_m$$
$$= B \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}.$$

Die Veränderlichen, in Bezug auf welche die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}$$

gebildet wird, sind $n - m$ von den $x, x_1, \cdots, x_{n-1}$ — ich habe dafür gerade

$$x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{n-1}$$

genommen — und ausserdem $m + 1$ neue Veränderliche

$$x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}.$$

Ist $m = n$, so sind die Veränderlichen, in Bezug auf welche

die Determinante auf der rechten Seite gebildet wird, alle neu, nämlich

$$x_n\,,\ x_{n+1}\,,\ \ldots,\ x_{2n}\,.$$

Mithin lehrt die Formel (7), wie aus den Determinanten b_k der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ durch Multiplication mit geeigneten Factoren und Addition die Determinante derselben Functionen hervorgeht, die in Bezug auf beliebige Veränderliche gebildet ist, und zwar mit B multiplicirt. Hieraus erhellt deutlich der in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesene Satz, dass alle jene Determinanten gleichzeitig verschwinden, wenn alle b_k verschwinden und B nicht verschwindet.

[**353**] Auf der rechten Seite der Gleichung (7) fehlen ganz und gar die Differentiale

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\,,\ \ldots,\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-1}}\,,$$

die auch in keiner der Grössen μ_k, wohl aber in allen Grössen b, b_1, ..., b_m vorkommen. (**431**) In der Determinante

$$b_k = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$$

ist das Aggregat der mit $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ multiplicirten Glieder

$$-\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\,.$$

Mithin ergiebt sich aus (7) folgender Lehrsatz:

Ist μ_k diejenige Determinante der Functionen f, f_1, ..., f_{n-1}, die in der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}$$

mit $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicirt ist, so wird für $m \leqq n$:

$$\begin{aligned}
&\mu\ \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \\
&+ \mu_1\ \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \mu_m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0\,.
\end{aligned}$$

Ist $m = n$, so sind in dieser identischen Gleichung je zwei mit einander multiplicirte Determinanten der Functionen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ so beschaffen, dass die eine in Bezug auf $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ gebildet ist, unter Weglassung einer dieser Grössen, die andre in Bezug auf diese weggelassene und die andern Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

17.

Wir wollen in den Formeln (1) und (3) des vorhergehenden Paragraphen $n = 1$ setzen. Setzen wir

$$(1) \qquad b_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial x},$$

so folgt

$$(2) \quad \Sigma \pm b\, b_1' \cdots b_m^{(m)} = B^m \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}.$$

Wir wollen ferner voraussetzen, dass x als Function von x_1, $x_2, \ldots, x_n$ durch die Gleichung

$$f = 0$$

bestimmt sei. (**432**) Dann ist

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_{k+1}} = 0$$

[**354**] und daher

$$b_k^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_{k+1}} \right\}.$$

Deuten wir durch Klammern an, dass in einer zu differentiirenden Function für x sein Werth dargestellt durch x_1, $x_2, \ldots, x_n$ eingesetzt worden ist, so wird

$$\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}}\right) = \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_{k+1}}$$

und daher

$$(4) \qquad b_k^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}}\right).$$

Mithin folgt aus (2), wenn man mit B^m dividirt und gleichzeitig

$$m + 1 = n$$

setzt:

$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial x} \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Setzen wir

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so wird nach (3)

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left\{A - A_1\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2\cdot\frac{\partial x}{\partial x_2} - \cdots - A_n\cdot\frac{\partial x}{\partial x_n}\right\},$$

und hieraus gewinnt man die bemerkenswerthe Formel:

$$(6)\quad \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

$$= A - A_1\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2\cdot\frac{\partial x}{\partial x_2} - \cdots - A_n\cdot\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

wo

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

ist, während die A_k aus A entstehen, indem man die Differentiale nach x_k durch die Differentiale nach x ersetzt.

Die Formel (6) zählt zu den ausgezeichneten Entdeckungen des berühmten *Lagrange*[17]).

Um aus der Formel (2) die Formel (6) herzuleiten, war es, wie ich noch bemerken möchte, nicht nothwendig, wie ich gethan habe, das Bestehen der Gleichung $f = 0$ anzunehmen, denn in der identischen Gleichung (2) ist f (**433**) eine beliebige Function, mithin darf man in der Formel (2) auch für die

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$$

willkürliche Grössen setzen, also auch die Grössen $\dfrac{\partial x}{\partial x_{k+1}}$.

[355] Wir wollen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = a_k^{(i)}$$

setzen. Setzen wir noch

$$(7) \qquad b_k^{(i)} = a a_{k+1}^{(i+1)} - a^{(i+1)} a_{k+1},$$

so folgt aus (1) und (2):

$$(8) \qquad \Sigma \pm b b_1' \ldots b_m^{(m)} = a^m \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_{m+1}^{(m+1)}\,{}^{18)}.$$

Da in dieser Formel die $a_k^{(i)}$ beliebige Grössen bezeichnen dürfen, wollen wir

$$a^{(i+1)} = u_{i+1}, \quad a_{k+1}^{(i+1)} = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{k+1}}$$

setzen, wo $u, u_1, \ldots, u_n$ beliebige Functionen der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bezeichnen. Dann wird

$$b_k^{(i)} = u \cdot \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - u_{i+1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_{k+1}} = u^2 \cdot \frac{\partial \frac{u_{i+1}}{u}}{\partial x_{k+1}}.$$

Folglich liefert die Formel (8), wenn wieder

$$m + 1 = n$$

gesetzt wird, den Lehrsatz:

Bezeichnen $u, u_1, \ldots, u_n$ Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und setzt man

$$\frac{u_1}{u} = v_1, \frac{u_2}{u} = v_2, \ldots, \frac{u_n}{u} = v_n,$$

so wird

$$(9) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \frac{1}{u^{n+1}} \Sigma \pm u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Setzt man für $u, u_1, \ldots, u_n$:

$$tu, tu_1, \ldots, tu_n,$$

wo auch t eine beliebige Function bezeichnet, so bleiben

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ unverändert. Mithin lehrt der vorstehende Lehrsatz, dass die Determinante

$$\Sigma \pm u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

wenn tu, tu_1 u. s. w. an die Stelle von u, u_1 u. s. w. gesetzt wird, (**434**) allein die Veränderung erfährt, dass sie mit dem Factor t^{n+1} multiplicirt wird, genau so, als ob t eine Constante wäre. Diese Bemerkung habe ich schon vor längerer Zeit bei einer andern Gelegenheit gemacht[19]).

18.

Man erhält die einfachste Darstellung einer Functionaldeterminante, bei der sie nämlich auf ein einziges Glied zurückgeführt wird, wenn man die Functionen in eine bestimmte Reihenfolge bringt, und dann eine jede bei den folgenden statt einer der unabhängigen Veränderlichen einführt. Es kommt das auf die schrittweise Elimination heraus, durch die ein System mehrerer Gleichungen so umgestaltet wird, dass man der Reihe nach [**356**] die Werthe der einzelnen Unbekannten aus den einzelnen Gleichungen entnehmen kann.

Zum Beispiel sei zwischen den Unbekannten $x, x_1, \ldots, x_n$ das System der Gleichungen

$$f = \alpha,\ f_1 = \alpha_1,\ \ldots,\ f_n = \alpha_n$$

gegeben. Man drücke vermöge der ersten Gleichung den Werth von x durch die übrigen Unbekannten aus und setze ihn in die übrigen Gleichungen ein. Darauf entnehme man aus der zweiten Gleichung, die nunmehr zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ allein besteht, den Werth von x_1 ausgedrückt durch $x_2, x_3, \ldots, x_n$ und setze ihn in die übrigen Gleichungen ein, und so fort. Durch dieses Verfahren wird das System der vorhergehenden Gleichungen so umgestaltet, dass f_n allein x_n; f_{n-1} allein x_n, x_{n-1}; f_{n-2} allein x_n, x_{n-1}, x_{n-2} enthält u. s. w. Mithin wird durch die letzte Gleichung x_n bestimmt. Setzt man diesen Werth in die vorletzte Gleichung ein, so enthält sie nur noch x_{n-1} und liefert daher den Werth von x_{n-1}, und so fort.

Sind die Gleichungen auf die beschriebene Art umgestaltet, so enthält die Function f_i ausser

$$x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n$$

noch die Grössen

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{i-1}.$$

Setzt man für diese Grössen wieder

$$f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{i-1}$$

ein, so wird f_i eine Function von

$$f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n.$$

Ich werde das dadurch bezeichnen, dass ich statt f_i:

$$f_i\ (f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$$

schreibe. Ist f_i durch diese Grössen dargestellt, so werde ich die partiellen Differentiale in Klammern schliessen, um diese Differentiale von den Differentialen derselben Function zu unterscheiden, wenn sie durch $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ dargestellt ist.

Bei diesen Festsetzungen werden $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n$ als Functionen von $x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ durch folgendes System von Gleichungen gegeben:

[435]
$$\begin{aligned}
0 &= F = f - f\ (x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
0 &= F_1 = f_1 - f_1\ (f,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\
0 &= F_2 = f_2 - f_2\ (f,\ f_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= F_n = f_n - f_n\ (f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{n-1},\ x_n);
\end{aligned}$$

das sind $n+1$ Gleichungen zwischen den Veränderlichen

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\text{*)}.$$

[357] Nach (5) §. 10 wird:

$$(1)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

Von den Functionen $F,\ F_1,\ \ldots,\ F_n$ enthält einzig und allein F_n die Grösse f_n, mithin verschwinden alle

$$\frac{\partial F}{\partial f_n},\ \frac{\partial F_1}{\partial f_n},\ \ldots,\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_n},$$

*) Dass ich dasselbe Zeichen f_i für die Veränderliche und die Function benutze, wird nicht zweideutig sein, weil dem Functionszeichen die Grössen beigefügt sind, welche die Function enthält.

und es wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}}\right) \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Von allen Functionen $F, F_1, \ldots, F_{n-1}$ enthält einzig und allein F_{n-1} die Grösse f_{n-1}, mithin wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \cdot \frac{\partial F_{n-2}}{\partial f_{n-2}}\right) \cdot \frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}},$$

also

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}$$

$$= \left(\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n-2}}{\partial f_{n-2}}\right) \cdot \frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}} \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

So fortfahrend gelangt man endlich zu der Formel:

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n},$$

und da

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{\partial F_1}{\partial f_1} = \cdots = \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$(2) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1.$$

(436) Da ferner von allen Functionen $F, F_1, \ldots, F_n$ einzig und allein F die Grösse x enthält, von allen $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ einzig und allein F_1 die Grösse x_1 u. s. w., so erhält man durch eine ähnliche Ueberlegung:

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right),$$

mithin

$$(3) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Setzt man die Formeln (2) und (3) in (1) ein, so ergiebt sich die bemerkenswerthe Formel:

$$(4) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung hat man sich die Function f_i durch $x, x_1, \ldots, x_n$ dargestellt zu denken, auf der rechten Seite soll die Function f_i durch $f, f_1, \ldots, f_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ ausgedrückt sein[20]).

[358] 19.

Auf dem Theoreme, das ich in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesen habe, beruhen die allgemeinen Formeln, die man für die Transformation mehrfacher Integrale anzuwenden pflegt.

Vorgelegt sei das mehrfache Integral

$$\int U \partial f \partial f_1 \ldots \partial f_n,$$

wo U eine gegebene Function von $f, f_1, \ldots, f_n$ bedeutet. Die Integration wird in der allgemeinsten Art so vollzogen, dass man der Reihe nach die Integration nach einer Veränderlichen ausführt, während die übrigen Veränderlichen als Constanten angesehen werden, und zwar so, dass auch die Grenzen der Integration Functionen der übrigen Veränderlichen sind. Integrirt man etwa zuerst nach f_n, so sind die Grenzen Functionen von $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$. Das Integral, das man so findet, wird wieder und zwar nach f_{n-1} integrirt, und die Grenzen der Integration sind Functionen von $f, f_1, \ldots, f_{n-2}$, und so fort, bis alle Integrationen ausgeführt sind.

Für diese mehrfachen Integrale gilt ein Theorem, das in dieser Theorie als Princip angesehen werden muss, dass nämlich die Reihenfolge der Integrationen, wenn nur die Function U innerhalb der Integrationsgrenzen niemals unendlich wird, in beliebiger Art verändert werden kann, sodass es gleichgültig ist, in Bezug auf welche Veränderliche die erste Integration stattfindet, in Bezug auf welche die zweite, und so fort, wenn nur die Grenzen der neuen Integrationen richtig bestimmt werden. Dieses (437) Princip ist an sich einleuchtend, wenn der Werth des mehrfachen Integrales als Grenze einer endlichen Summe bei beständig abnehmenden Intervallen definirt wird[21]).

Mit Hülfe dieses Principes lässt sich sofort die Frage

beantworten, welcher Ausdruck unter dem Zeichen der mehrfachen Integration für das Element

$$\partial f\, \partial f_1 \ldots \partial f_n$$

zu setzen ist, wenn statt der Veränderlichen $f, f_1, \ldots, f_n$ andre Veränderliche eingeführt werden.

Die erste Integration geschehe nach f_n. Für diese Veränderliche werde eine andre x_n eingeführt, indem festgesetzt wird, dass f_n irgend eine Function von x_n ist, welche die Grössen $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ enthalten kann, die bei dieser ersten Integration als Constanten angesehen werden. An die Stelle des Differentiales ∂f_n hat man, wenn die Integration nach x_n auszuführen ist, den gleichbedeutenden Ausdruck

$$\partial f_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial x_n$$

zu setzen, sodass das vorgelegte mehrfache Integral gleich dem folgenden ist:

$$\int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial f\, \partial f_1 \ldots \partial f_{n-1}\, \partial x_n .$$

Nunmehr ändern wir die Reihenfolge der Integrationen und führen die erste Integration nicht nach x_n, sondern nach f_{n-1} aus. Statt f_{n-1} führen wir wieder eine andre Veränderliche x_{n-1} ein, indem wir festsetzen, dass f_{n-1} irgend eine Function von x_{n-1} ist, [**359**] die auch die übrigen Grössen $f, f_1, \ldots, f_{n-2}, x_n$ enthalten darf, die bei dieser ersten Integration als Constanten angesehen werden. Dann wird das vorgelegte Integral

$$\int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial f\, \partial f_1 \ldots \partial f_{n-2}\, \partial x_n\, \partial f_{n-1}$$
$$= \int U \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial f\, \partial f_1 \ldots \partial f_{n-2}\, \partial x_n\, \partial x_{n-1} .$$

Abermals werde die Reihenfolge der Integrationen geändert, und die erste Integration nicht nach x_{n-1}, sondern nach f_{n-2} angestellt, wofür eine neue Veränderliche x_{n-2} eingeführt wird. Indem so immer nach der Einführung einer neuen Veränderlichen die Reihenfolge der Integrationen geändert, und statt

der Veränderlichen, nach der die erste Integration auszuführen ist, eine neue Veränderliche eingeführt wird, gelangt man endlich zu folgendem Ausdrucke für das transformirte Integral:

$$\int U \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial x\, \partial x_1 \cdots \partial x_n.$$

In dem transformirten Ausdrucke ist f_n eine Function von $f, f_1, \ldots, f_{n-1}, x_n$, ferner f_{n-1} (**438**) von $f, f_1, \ldots, f_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ und allgemein f_i von $f, f_1, \ldots, f_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$, sodass die letzte Function f alle neuen Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ enthält. Setzt man aber den Ausdruck von f in f_1 ein, die Ausdrücke von f und f_1 in f_2, die Ausdrücke von f, f_1 und f_2 in f_3, und so fort, so werden $f, f_1, \ldots, f_n$ sämmtlich Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$, und die Determinante dieser Functionen

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

ist nach dem Theoreme, das in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesen wurde, gleich dem Producte

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Setzen wir jetzt für dieses Product in dem transformirten mehrfachen Integrale die Determinante, so erhalten wir

$$\int U \partial f\, \partial f_1 \cdots \partial f_n = \int U \cdot \left(\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial x\, \partial x_1 \cdots \partial x_n,$$

und das ist die allgemeine Formel für die Transformation eines mehrfachen Integrales. *Euler* und *Lagrange* haben diese Formel für zwei und drei Veränderliche ungefähr zu derselben Zeit gefunden, jener indessen ein wenig früher[22].

Auch diese Formel lässt in ausgezeichneter Weise die Analogie zwischen dem Differential und der Functionaldeterminante erkennen.

Anmerkungen.

Jacobi's Abhandlung De determinantibus functionalibus, die hier in deutscher Uebertragung neu herausgegeben wird, ist 1841 in Crelle's Journal erschienen Bd. 22. S. 319—352, wieder abgedruckt in den Ges. Werken, Bd. III. S. 393—438. Sie folgt dort unmittelbar der Abhandlung De formatione et proprietatibus determinantium, die den Inhalt des vorhergehenden Bändchens der Klassiker bildet. Hat diese Abhandlung bewirkt, dass die Determinanten, diese Algebra über der Algebra, wie *Sylvester* einmal sich ausdrückte, zu einem unentbehrlichen Werkzeuge der Mathematiker wurden, so handelte es sich in jener um eine Anwendung der Determinanten von solcher Fruchtbarkeit, dass es wohl kein Gebiet der höheren Analysis giebt, in dem man der »Jacobi'schen Determinante« nicht begegnet.

Es ist von hohem Interesse zu verfolgen, wie der Begriff der Functionaldeterminante sich allmählich entwickelt hat. Bestimmte, concrete Aufgaben führten auch hier zu den höchsten Abstractionen. *Euler* hatte 1744 in der Methodus inveniendi etc. das Problem behandelt, die Rotationskörper zu bestimmen, welche bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. Indem er diese Aufgabe dahin verallgemeinerte, man solle überhaupt die Gestalt der Körper finden, die bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen, wurde er auf die Transformation von Doppelintegralen geführt und gelangte so in einer vor dem Jahre 1762 verfassten, aber erst 1770 veröffentlichten Abhandlung zu der Bildung, die wir jetzt als die Determinante eines Systems von zwei Functionen zweier Variabeln bezeichnen. Bald darauf, 1775, wurde *Lagrange* durch eine Aufgabe der Potentialtheorie, die Bestimmung der Kräfte, die ein gravitirendes Ellipsoid ausübt, dazu veranlasst, in entsprechender Weise die allgemeine Transformation der dreifachen Integrale zu erledigen.

Auch bei *Jacobi* bilden den Ausgangspunkt Untersuchungen über mehrfache Integrale, zu denen er durch *Gauss'* klassische Abhandlung über den Einfluss eines störenden Planeten vom Jahre 1818 veranlasst wurde. Die merkwürdige Umformung eines einfachen Integrales, die *Gauss* dort angegeben hatte, konnte *Jacobi*, der ihren Zusammenhang mit dem Probleme der Hauptaxen der Flächen zweiter Ordnung durchschaute, auf gewisse zweifache Integrale ausdehnen, und er gelangte nun durch eine Reihe von Untersuchungen, die in den Jahren 1827 bis 1833 in Crelle's Journal erschienen sind, dazu, die entsprechenden Umformungen n-facher Integrale auf Grund der simultanen Transformation von zwei quadratischen Formen in $n+1$ Veränderlichen auf die eleganteste Weise zu erledigen.

Während *Jacobi* in diesen Abhandlungen den Nachdruck auf die Umformung von mehrfachen Integralen legt und die zahlreichen Sätze über Determinanten nur als Mittel zu seinem Zwecke entwickelt, hat er bald darauf die allgemeine Bedeutung dieses Algorithmus erkannt und ihn in seinen Abhandlungen vom Jahre 1841 zu einer selbständigen Theorie ausgestaltet.

Das von ihm geschaffene Instrument der Functionaldeterminanten hat *Jacobi* selbst bei seinen Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen mit dem schönsten Erfolge benutzt. Damit war jedoch seine Verwendbarkeit durchaus nicht erschöpft. *Jacobi* hat es noch erlebt, wie wesentlich mit Hülfe der Functionaldeterminanten *Boole*, *Cayley* und *Sylvester*, *Eisenstein* und *Aronhold* eine neue Disciplin der Algebra, die Lehre von den Invarianten und Covarianten der Formen, ausbildeten, und parallel damit ging die Verwerthung der »Jacobi'schen Determinante« für die algebraische Geometrie; es genüge hier *Hesse* und *Clebsch* zu nennen.

Aber die Abhandlung über die Functionaldeterminanten hat noch weiter gewirkt. Mit ihr beginnen die wichtigen Untersuchungen, die in neuerer Zeit sich an »Systeme von Functionen mehrerer Veränderlichen« geknüpft haben. Es kommt hierbei eine Auffassung der Functionaldeterminanten in Betracht, die *Jacobi* sicher bekannt war, wenn er sie auch nicht ausdrücklich ausgesprochen hat. Sie ist bedingt durch die Deutung der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Coordinaten der Punkte einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Gekannt hat *Jacobi* diese Deutung. Das bezeugen die von *Clebsch* herausgegebenen Vorlesungen über Dynamik, die *Jacobi* im Winter 1842/43 zu Königsberg i. Pr. gehalten hat. Hier heisst es (Zweite Ausgabe. Berlin 1884. S. 205):

»Giebt man dem Begriffe der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$

eines sich frei bewegenden Punktes mit der Masse 1 eine Ausdehnung auf n Dimensionen und setzt

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2)$$

u. s. w.«

Wenn *Jacobi* die Beziehung der Functionaldeterminanten zu einer n-dimensionalen Geometrie in seiner Abhandlung nicht erwähnt, erklärt sich das wohl daraus, dass er mit seinen Zeitgenossen solchen Speculationen keinen erheblichen Werth beilegte. Eine Ausnahme hiervon machte *Gauss*, auf den auch das Wort »Mannigfaltigkeit« zurückzugehen scheint (Werke, Bd. II. S. 178: Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen [1831]). Das zeigt eine interessante Aeusserung von *Gauss*, die *Sartorius von Waltershausen* (Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 81) mitgetheilt hat: er habe gewisse Probleme zurückgelegt, die er in einem höheren Zustande geometrisch zu behandeln gedächte, und es wird bestätigt durch eine Stelle in den Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen vom Jahre 1849. Am Ende des §. 5 dieser Abhandlung sagt *Gauss*:

»Ich werde die Beweisführung in einer der Geometrie der Lage entnommenen Einkleidung darstellen, weil jene dadurch die grösste Anschaulichkeit und Einfachheit gewinnt. Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höhern, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössen-Combinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.«

Ein genialer Versuch auf diesem Gebiete, den *Gauss* vielleicht im Auge hatte, als er diese Zeilen schrieb, lag damals bereits vor: *Grassmann*'s erste Ausdehnungslehre vom Jahre 1844. Aber er blieb unbeachtet. Ein allgemeines Interesse für die Lehre von den n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten

erwachte erst, als 1867 *Riemann*'s Habilitationsvorlesung vom Jahre 1854: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen veröffentlicht wurde, und die Wirkung, die *Riemann*'s Ideen ausübten, war um so intensiver, als die Entwickelung der neueren Mathematik immer mehr zu der Betrachtung von Systemen beliebig vieler Grössen geführt hatte, und so, vor Allem durch *Jacobi*'s algebraische Arbeiten, neben dem noch *Cauchy* zu nennen ist, der Boden für solche Anschauungsweisen geschaffen war.

In rascher Folge erschienen nun (1867—1869) die bekannten Arbeiten von *Helmholtz*, *Christoffel*, *Lipschitz*, *Beltrami* und *Kronecker*, und bald darauf zeigten *Klein* und *Lie*, welch' hohen Werth die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten als methodische Hülfsmittel besitzen; es genüge hier hinzuweisen auf die Schriften: *F. Klein*, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Programm, Erlangen 1872, wieder abgedruckt Mathematische Annalen, Bd. 43. (1893) S. 63—100 und *S. Lie*, *Geometrie der Berührungstransformationen.* Bd. I. Leipzig 1896, wo besonders die werthvollen geschichtlichen Bemerkungen S. 274 und 275 sowie S. 519 bis 521 zu beachten sind.

Die Fruchtbarkeit dieses Gedankens hat in den verschiedensten Gebieten der neueren Mathematik sich aufs schönste bewährt. Bei allen diesen Untersuchungen waren *Jacobi*'s Functionaldeterminanten von grundlegender Bedeutung, und so haben sich die Wirkungen seiner klassischen Abhandlung De determinantibus functionalibus bis in die neueste Zeit hinein erstreckt.

Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen über die vorliegende neue Ausgabe der *Jacobi*'schen Abhandlung Platz finden. Der Uebersetzung ist die Originalabhandlung in Crelle's Journal zu Grunde gelegt, von der die Gesammelten Werke (Bd. III. Berlin 1884, S. 393—438) einen wortgetreuen Abdruck geben. Eine genaue Prüfung hat gezeigt, dass in diesem Texte verschiedene störende Druckfehler vorhanden sind, und dass auch einige Versehen *Jacobi*'s, besonders in §. 14, der Verbesserung bedürfen. Sämmtliche hierdurch erforderten Abweichungen von dem Originale findet man in den folgenden Anmerkungen angegeben und, wo es nothwendig schien, begründet. Ausserdem enthalten die Anmerkungen einige Ergänzungen zu der Litteratur, die *Jacobi* angeführt hat; bei

der Abfassung dieser Anmerkungen ist mir *Baltzer*'s bekanntes Werk: Theorie und Anwendung der Determinanten 5. Aufl. Leipzig 1881) mehrfach von Nutzen gewesen.

Wie es bei diesen Ausgaben üblich ist, sind die Seitenzahlen der Originalabhandlungen dem Texte beigefügt worden. Da die Gesammelten Werke sehr verbreitet sind, glaubte ich, sie ebenfalls berücksichtigen zu sollen; zur Unterscheidung sind diese Seitenzahlen in runde Klammern eingeschlossen worden.

1) *Zu S. 3. Jacobi* bezieht sich auf die Abhandlung: De formatione et proprietatibus determinantium, die in dem zweiundzwanzigsten Bande von Crelle's Journal der Abhandlung: De determinantibus functionalibus unmittelbar vorausgeht; wiederabgedruckt ist sie in den Gesammelten Werken, Bd. III. S. 355—392 und in deutscher Uebertragung neu herausgegeben in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften Nr. 77.

2) *Zu S. 3.* Hauptsächlich kommt hier in Betracht die Abhandlung: De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis etc., Crelle's Journal, Bd. 12. S. 1—69 (1833), Ges. Werke, Bd. III. S. 191—268.

3) *Zu S. 5.* Die hier aufgestellte Regel für die Anwendung der Symbole

$$d, \partial$$

hat *Jacobi* in den Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium etc. (Crelle's Journal, Bd. 23. S. 4. Ges. Werke. Bd. IV. S. 152) noch einmal wiederholt und später stets befolgt. Die meisten Mathematiker haben seitdem diese sehr zweckmässige Schreibweise angewandt. Neben ihr findet man jedoch nicht selten, besonders bei französischen Autoren, eine andre, die auf *Cauchy* zurückgeht, der

$$D_x f \quad \text{statt} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot$$

schreibt.

Die Regel, die *Jacobi* aufstellte, konnte nur als die Fixirung eines bereits bestehenden Gebrauches gelten. Sie war zum Beispiel schon im 18. Jahrhundert von *Legendre* vorgeschlagen und angewandt worden, der in seiner Abhandlung:

Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations (Histoire de l'Académie avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique. Année 1786. Paris 1788. S. 8) sich folgendermaassen äussert: »Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, bezeichne ich mit $\frac{\partial v}{\partial x}$ den Coëfficienten von dx in dem Differentiale von v und mit $\frac{dv}{dx}$ das vollständige Differential von v getheilt durch dx«. Man vergl. auch *Klügel*, Math. Wörterbuch. Bd. I. S. 891.

4) *Zu S. 6.* Théorie des fonctions analytiques. Paris 1797. (Oeuvres. t. IX. S. 143.) Der Mangel der Bezeichnungsweise von *Lagrange*, den *Jacobi* erwähnt, lässt sich leicht beseitigen, indem man mehrfache Indices benutzt und zum Beispiel

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma} = f_{\alpha\beta\gamma}$$

setzt.

5) *Zu S. 7.* Auch diese Bezeichnungsweise ist zweideutig, indem das Zeichen $f(\xi, \eta)$ in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, denn $f(x, y)$ ist eine andre Function von x und y als $f(x, u)$ von x und u.

6) *Zu S. 15.* *Cauchy* nennt diese Bildungen, zu deren Studium er durch *Jacobi*'s Arbeit veranlasst wurde, fonctions différentielles alternées (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. t. II. Paris 1841. S. 141). *Sylvester* (Philosophical Transactions, t. 143, London, 1853. S. 476) nannte sie Jacobians und schrieb dafür

$$J(f, f_1, \ldots, f_n);$$

auch *Cayley* bediente sich dieser Benennung (Crelle's Journal, Bd. 52. 1856. S. 276; Math. Papers, Vol. IV. S. 30.).

7) *Zu S. 15.* *Bertrand* ist in seinem lesenswerthen Mémoire sur le déterminant d'un système de fonctions (Journal de Mathématiques pures et appliquées. t. XVI. Année 1851. S. 212—227) dieser Analogie weiter nachgegangen und hat ihren Grund darin gefunden, dass die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

als Grenzwerth des Quotienten

$$\Sigma \pm d_1 f_1 \cdot d_2 f_2 \cdots d_n f_n : \Sigma \pm d_1 x_1 \cdot d_2 x_2 \cdots d_n x_n$$

definirt werden kann; dabei ist

$$d_i f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} d_i x_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} d_i x_2 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} d_i x_n$$

zu setzen. Von dieser Definition ausgehend giebt *Bertrand* neue, elegante Beweise für die meisten Lehrsätze, die *Jacobi* im Folgenden entwickelt.

Um die Analogie mit dem Differentialquotienten auch äusserlich hervortreten zu lassen, verwendete *Donkin* (Philosophical Transactions, London 1854. S. 72) die seitdem vielfach benutzte Bezeichnung:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Ausserordentlich einfach gestaltet sich die Theorie der Functionaldeterminanten bei Benutzung der Methoden *Grassmann*'s. Setzt man

$$e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots + e_n x_n = x,$$
$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_n f_n = f,$$

so wird

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{df}{dx}\right)^n;$$

man vergleiche die Bemerkung *Grassmann*'s in der Ausdehnungslehre. Berlin 1862. Nr. 441. (Gesammelte math. und phys. Werke, Bd. I. Theil II. S. 298.) Eine ausführliche Darstellung gab *Scott*, Theory of determinants and their application. Cambridge 1880. S. 138.

8) *Zu S. 20.* Einen Beweis, bei dem der Schluss von n auf $n + 1$ vermieden wird, hat *Bertrand* angedeutet (a. a. O. S. 214); wenn man ihn streng durchführen will, fällt er jedoch ziemlich umständlich aus. Einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass das Verschwinden der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer Relation

$$\Pi(f_1, \ldots, f_n) = 0$$

ist, theilte mir Herr Professor *M. Hamburger* in Berlin mit:

»I. Es sei $\Pi(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Dann folgt aus dem Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unmittelbar, dass

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 0$$

sein muss.

II. Es sei umgekehrt

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

dann giebt es stets mindestens ein System von Grössen a_1, $a_2, \ldots, a_n$, die erstens nicht sämmtlich verschwinden und zweitens den Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= 0 \\
a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + a_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} &= 0
\end{aligned}$$

genügen. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx_1, dx_2, ..., dx_n und addirt, so erhält man

$$a_1\, df_1 + a_2\, df_2 + \cdots + a_n\, df_n = 0,$$

und hieraus folgt, wenn etwa die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(r \leqq n)$ von Null verschieden sind, während $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$ verschwinden, die Gleichung

$$df_r = -\frac{a_1}{a_r}\, df_1 - \frac{a_2}{a_r}\, df_2 - \cdots - \frac{a_{r-1}}{a_r}\, df_{r-1},$$

die unmittelbar zeigt, dass f_r eine Function von $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ allein ist.«

Kronecker hat gegen den vorhergehenden Lehrsatz den Einwand erhoben, »dass es Beziehungen zwischen Grössen giebt, welche durch Beziehungen zu andern Grössen vermittelt sind, und bei deren Definition eine solche Vermittelung unvermeidlich ist« (Bemerkungen zur Determinantentheorie. Journal für Mathematik, Bd. 72. 1869. S. 156. Werke. Bd. I. S. 244) und eine andre Formulirung vorgeschlagen. Man vergleiche dazu die Ausführungen in *Kronecker*'s Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von *E. Netto*, Leipzig 1894. S. 235—236.

9) *Zu S. 26.* Die Formel (1) steht in engem Zusammenhange mit der merkwürdigen Identität:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0;$$

vergl. *Jacobi*'s Abhandlung: Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi (Crelle's Journal, Bd. 27. 1844. S. 203. Ges. Werke, Bd. IV. S. 323).

10) *Zu S. 27. Moebius* hat die Gleichung (3) für $n = 2$ angegeben (Über eine allgemeine Art der Affinität geometrischer Figuren, Crelle's Journal, Bd. 12. 1834. S. 116). Andre Beweise der allgemeinen Formel findet man bei *Cauchy* und *Bertrand.*

11) *Zu S. 28.* Andre Beweise der Formel (5) gaben *Bertrand* und *Kronecker* (Werke. Bd. I. S. 240).

12) *Zu S. 34.* In dem Originale und in dem Abdrucke steht irrthümlich

$$f, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

statt

$$x, f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

13) *Zu S. 35.* Statt $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$ muss es heissen

$$\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n \text{ sive } f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n,$$

denn sonst würde man nur die Formel (6), nicht auch die Formel (5), erhalten.

14) *Zu S. 38.* In dem §. 14 mussten verschiedene Aenderungen vorgenommen werden. *Jacobi* hatte nämlich geglaubt, sein Lehrsatz gelte, wenn f_i durch alle Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ ausser f_i selbst umgestaltet wird. In der Abhandlung: Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi (Crelle's Journal, Bd. 27. 1844 S. 216—217,

Ges. Werke Bd. IV. S. 337—338) hat er auf dieses Versehen aufmerksam gemacht und den Satz in der richtigen Form ausgesprochen und bewiesen. Es war jedoch möglich, durch einige kleine Aenderungen das Versehen wieder gut zu machen und einen correcten Text herzustellen.

Eine werthvolle Erläuterung des Lehrsatzes, die *Jacobi* a. a. O. gegeben hat, ist in kleinerer Schrift hinzugefügt worden.

15) *Zu S. 42.* Hat man allgemein die Gleichungen

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \alpha, \quad f_1(x, x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1, \quad \ldots$$
$$\ldots, f_n(x, x_1, \ldots, x_n) = \alpha_n$$

und leitet aus ihnen durch irgend welche Umformungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\varphi(x, x_1, \ldots, x_n; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha, \\ &\varphi_1(x, x_1, \ldots, x_n; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x, x_1, \ldots, x_n; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_n \end{aligned}$$

her, so ist nach §. 10 (5), indem man die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zwischen den $2n + 2$ Grössen

$$x, x_1, \ldots, x_n; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

ansieht:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}$$
$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial(\varphi - \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial(\varphi_n - \alpha_n)}{\partial \alpha_n}}.$$

Soll also

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

werden, so muss

$$\Sigma \pm \frac{\partial(\varphi - \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial(\varphi_n - \alpha_n)}{\partial \alpha_n} = (-1)^{n+1}$$

sein; vergl. auch *Bertrand* a. a. O. S. 223—225.

16) *Zu S. 45.* In dem Originale und in dem Abdrucke heisst es B^{m-1} statt B^{m+1}.

Univ. of Arizona Library

17) *Zu S. 52.* Die Gleichung (6) ist von grundlegender Bedeutung für die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen I. O., die von *Lagrange* (Mémoires de Berlin, Années 1772, 1774, 1779, 1785) herrührt. Aus ihr folgt unmittelbar der Lehrsatz: Sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gegebene Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$, und bedeutet $\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ eine willkürliche Function dieser Argumente, so ist

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$$

das allgemeine Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

$$A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = A .$$

Man vergleiche auch *Jacobi*, Theoria novi multiplicatoris etc., Crelle's Journal. Bd. 27. 1844. S. 233—241 (Ges. Werke. Bd. IV. S. 355—364).

18) *Zu S. 53.* In dem Originale wie in dem Abdrucke steht

$$a^m \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_m^{(m)}$$

statt

$$a^m \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_m^{(m)} a_{m+1}^{(m+1)} .$$

19) *Zu S. 54.* Diese Bemerkung findet sich bereits in der Abhandlung: De binis functionibus homogeneis secundi ordinis etc., Crelle's Journal, Bd. 12. 1833. S. 40 (Ges. Werke, Bd. III. S. 235—236).

Lipschitz hat in der Abhandlung: Ueber gewisse Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden (Crelle's Journal, Bd. 66. 1866. S. 281) folgenden Satz über Functionaldeterminanten hergeleitet. Setzt man

$$\xi_1 = x_1 f(x_1, \ldots, x_n), \; \xi_2 = x_2 f(x_1, \ldots, x_n), \; \ldots$$
$$\ldots, \; \xi_n = x_n f(x_1, \ldots, x_n),$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}$$
$$= f^{n-1} \left(f + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n \right) .$$

Diese Formel ergiebt sich in einfachster Weise, wenn man in *Jacobi*'s Gleichung (9):

$$v_1 = \xi_1, \ldots, v_n = \xi_n; \; u_1 = x_1, \ldots, u_n = x_n; \; u = \frac{1}{f}$$

setzt.

20) *Zu S. 57.* Einen sehr einfachen Beweis dieser Formel gab *Bertrand*, a. a. O. S. 221.

21) *Zu S. 57. Jacobi* setzt stillschweigend voraus, dass U eine »vernünftige« Function von $f, f_1, \ldots, f_n$ ist. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so kann es sich ereignen, dass das Integral je nach der Reihenfolge der Integrationen verschiedene Werthe annimmt. Das Theorem gilt jedoch stets, sobald man festsetzt, dass U eine stetige Function von f, $f_1, \ldots, f_n$ ist; vergl. *Picard*, Traité d'analyse. Bd. I. Paris 1891. S. 128.

22) *Zu S. 59. Euler* lehrte die Transformation der Doppelintegrale in der Abhandlung: De formulis integralibus duplicatis. Man findet sie in dem XIV. Bande der Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae pro anno 1759, der erst 1770 erschienen ist. Wiederabgedruckt ist sie in dem vierten Bande der Institutiones calculi integralis S. 416—445.

Der Briefwechsel zwischen *Euler* und *Lagrange* macht es wahrscheinlich, dass diese Abhandlung 1760 abgefasst ist (man vergl. die Briefe von *Lagrange* an *Euler* vom 1. März 1760 und die Antwort *Euler*'s vom 24. Juni 1760. *Lagrange*, Oeuvres, t. XIV. Paris 1892. S. 189 und S. 197). Jedenfalls ist sie vor 1762 geschrieben, denn *Euler* bemerkt in ihr, es sei noch nicht gelungen, die Variation eines Doppelintegrals zu ermitteln, während *Lagrange* 1762 die Differentialgleichung der Minimalflächen aufgestellt und *Euler* mitgetheilt hatte (*Euler* an *Lagrange*, 9. Nov. 1762, a. a. O. S. 203—204).

Die Transformation von dreifachen Integralen behandelte *Lagrange* in der Abhandlung: Sur l'attraction des sphéroides elliptiques (Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres. Année 1773. Berlin 1775. S. 121 bis 148. Oeuvres, t. III. S. 619—658).

Jacobi hat seine allgemeine Formel für die Transformation n-facher Integrale bereits 1833 in der Abhandlung De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis etc., Crelle's Journal Bd. 12. S. 38 (Ges. Werke, Bd. III. S. 233)

benutzt, den Beweis jedoch damals »der Kürze wegen unterdrückt«. *Cauchy* irrt daher, wenn er (a. a. O. S. 150) sagt, diese Formel verdanke man *Catalan* (Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. t. 14. 1840).

Eine andre, sehr durchsichtige Herleitung der Formel

$$\int U \partial f \partial f_1 \cdots \partial f_n = \int U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \partial x \, \partial x_1 \cdots \partial x_n$$

hat *Bertrand* (a. a. O. S. 225—227) gegeben; sie beruht darauf, dass das Integrationsgebiet für $n = 2, 3$ u. s. w. bezüglich in unendlich kleine Dreiecke, Tetraeder u. s. w. getheilt wird.

Bei den Anwendungen sieht man die Differentiale ∂f, $\partial f_1, \cdots, \partial f_n$; $\partial x, \partial x_1, \cdots, \partial x_n$ als positiv an, und dann bedarf die *Jacobi*'sche Formel einer gewissen Abänderung. Bedeutet ε das Vorzeichen von

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

so hat man

$$\int U \partial f \partial f_1 \cdots \partial f_n = \int U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \varepsilon \partial x \, \partial x_1 \cdots \partial x_n$$

zu setzen; vergl. *Picard*, Traité d'analyse. Bd. I. Paris 1891. S. 131—132 und *Kronecker*, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von *E. Netto*. Leipzig 1894. Vierzehnte Vorlesung.

Königsberg i./Pr., im Februar 1896.

täckel.

512.83 J16UF
a39001 006901964b

Nr. 14. **C. F.** [illegible]
nen e[illegible]
M 1.[illegible]

» 17. **A. Bra**[illegible]ungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) *M* 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) *M* 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.). *M* —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) *M* 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) *M* 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) *M* 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) *M* 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) *M* 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) *M* 1.20.